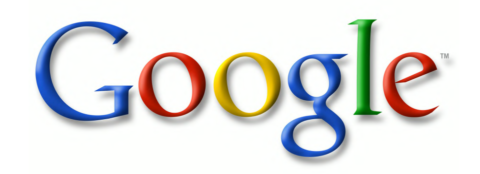


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

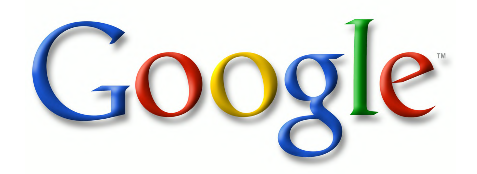
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter http://books.google.com durchsuchen.



Auslese

aus meiner

Unterrichts- und Vorlesungspraxis

von

Prof. Dr. Hermann Schubert

I



Auslese

aus meiner

Unterrichts- und Vorlesungspraxis

Von

Dr. Hermann Schubert
Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg

Erster Band

Mit 17 Figuren

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1905

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht, von der Verlagshandlung vorbehalten.

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig.

Dem hochverdienten Chef

des

Hamburger Vorlesungswesens

Herrn Senator Dr. von Melle

ehrerbietigst

gewidmet.

90093



Vorwort.

Fünfunddreißig Jahre Schulpraxis und achtundzwanzig Jahre Vorlesungspraxis lassen es erklärlich erscheinen, daß der Verfasser dieser „Auslese" in den verschiedensten Gebieten der Mathematik auf Vereinfachung und übersichtlichere Gestaltung der Beweise oder der Darstellungsart, sowie auf Methoden gekommen ist, durch welche der Schüler mit weniger Mühe in das zu lernende Gebiet eindringen kann. Denn die mathematische Didaktik sollte sich nicht auf oft erfolglose Verbesserungsvorschläge bezüglich der Verteilung und der Ausdehnung des Lernstoffs beschränken, sondern sollte umgekehrt die Pflicht fühlen und erfüllen, den zu bewältigenden Lernstoff so einfach und zugänglich zu gestalten, daß auch der minder begabte Schüler in der nun einmal von oben herab vorgeschriebenen Zeit mehr lernt und begreift, als es bisher der Fall war.

Obgleich meine Vorlesungspraxis nicht über die Integralrechnung, die Zahlentheorie und die Gleichungen höheren Grades hinausging und zur Hälfte

Vorträge über elementare Mathematik für Lehrer umfaßte, so dürfte das vorliegende Buch dennoch für viele jüngere Fachgenossen beachtenswerte Winke enthalten und gerade jetzt zeitgemäß sein, wo man mehr und mehr an den Universitäten Vorlesungen auch über elementare Mathematik für Lehrer einrichtet, Vorlesungen, die in Hamburg schon seit zwei Dezennien abgehalten werden.

Hamburg, im Mai 1905.

Professor Dr. H. Schubert.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

I. Abschnitt. Elementare Berechnung der Logarithmen auf der untersten Stufe. (Untersekunda.) 9

§ 1. Einleitung 9
§ 2. Die drei Hauptformeln 11
§ 3. Berechnung guter unterer Grenzen von log 2 und log 3 21
§ 4. Berechnung unterer Grenzen der Logarithmen der übrigen Primzahlen unter Hundert . 25
§ 5. Berechnung guter oberer Grenzen von log 2 und log 3 35
§ 6. Berechnung oberer Grenzen der Logarithmen der übrigen Primzahlen unter Hundert . 39
§ 7. Tafel der unteren und oberen Grenzen für die Logarithmen aller Zahlen unter Hundert 54
§ 8. Die unteren und oberen Grenzen für die Logarithmen aller Zahlen über Hundert . 60

II. Abschnitt. Die Siebzehnteilung des Kreises . 69

§ 1. Einleitung 69
§ 2. Kreisteilungsgleichungen 70
§ 3. Lösung der Gleichung $x^{17} = 1$ durch quadratische Gleichungen 76
§ 4. Geometrische Deutung des Lösungsweges . 78

III. Abschnitt. Die Kreisteilungsgleichungen . . 83

§ 1. Allgemeineres 83
§ 2. Die Summen der Potenzen der Zahlen η . 85
§ 3. Bildung der Resolvente vom Grade $\frac{1}{4}(p-1)$ 91
§ 4. Die Primzahl p ist gleich $4 \cdot v + 1$, wo v Primzahl ist 94

Seite

§ 5. Die Primzahl p ist gleich $8 \cdot v + 1$, wo v Primzahl ist 97

IV. Abschnitt. **Die Zahl der von zwei Planspiegeln entworfenen Bilder** 101

V. Abschnitt. **Volumen des Obelisken aus Höhe und zwei oder drei beliebig gelegten Parallelschnitten** 122

VI. Abschnitt. **Über eine beim Aufbau des absoluten Maßsystems begangene Inkonsequenz** . 137

VII. Abschnitt. **Elementare Ableitung sehr enger Grenzen für die Schwingungszeit eines mathematischen Pendels** 153

VIII. Abschnitt. **Die Konstantenzahl eines Polyeders und der Eulersche Lehrsatz** 167

IX. Abschnitt. **Einführung in die neuere Geometrie** 172

§ 1. Doppelverhältnis von vier Punkten einer geraden Punktreihe 172

§ 2. Projektive Punktreihen und Strahlenbüschel, der Pascalsche Satz 180

§ 3. Pol und Polare bezüglich eines Kreises . 187

X. Abschnitt. **Kreise und Kugeln** 192

§ 1. Die Konfiguration der Ähnlichkeitspunkte von drei oder mehr Kreisen 192

§ 2. Die Konfiguration der Ähnlichkeitspunkte von vier und mehr Kugeln 201

§ 3. Chordalen von drei und mehr Kreisen . . 207

§ 4. Chordalebenen bei vier und mehr Kugeln. 213

§ 5. Die Steinersche Lösung des Problems des Apollonius 216

§ 6. Die sechzehn Kugeln, welche vier gegebene Kugeln berühren 227

I. Abschnitt.

Elementare Berechnung der Logarithmen auf der untersten Stufe (Untersekunda). [1]

§ 1. Einleitung.

Meist werden in Untersekunda die Logarithmentafeln den Schülern in die Hand gegeben, ohne daß ihnen irgend ein Weg gezeigt wird, auf welchem man zu den Logarithmen der Zahlen gelangen kann. Sie lernen die Handhabung der Tafeln und das logarithmische Rechnen. Wie man aber die fünf Dezimalstellen, oder auch nur die ersten drei, berechnen kann, wird ihnen nicht gesagt. Ja, es wird ihnen sogar oft, während der ganzen Schulzeit bis nach Oberprima hin, keine Methode gezeigt, die mühelos zu den Logarithmen der Zahlen führt. Denn die Potenzreihen und demgemäß auch die logarithmischen Reihen,

---

[1]) Eine solche elementare Berechnung der Logarithmen, aber mit weniger guten unteren und oberen Grenzen, zeigte ich auch schon in Band 35 (S. 273 u. f.) der Zeitschr. für math. und naturw. Unterricht.

sind an den meisten humanistischen Gymnasien aus dem Pensengebiet der Prima verbannt. Deshalb habe ich in meinem Buche „Elementare Berechnung der Logarithmen“ [1]) einen Weg gezeigt, der zu hinreichend vielen Stellen der Logarithmen der aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen führt, und der von jedermann verstanden werden kann, welcher den binomischen Lehrsatz für den Fall beherrscht, daß der Exponent eine allgemeine Zahl, also ein Buchstabe ist. Da der binomische Lehrsatz für diesen allgemeinen Fall erst in Prima durchgenommen werden kann, so ist der in dem zitierten Buche skizzierte Weg nur Primanern zugänglich. Es erscheint aber pädagogisch wünschenswert, daß schon diejenigen Schüler, die soeben den Begriff und die Grundregeln des Logarithmierens gefaßt haben, einen Weg kennen lernen, auf dem sie selbständig zu den ersten Dezimalstellen der Logarithmen gelangen können. Ein solcher Weg ist im folgenden beschrieben, und zwar ist zum Verständnis dieses Weges nichts weiter erforderlich, als die Formeln für:

$$(a-b)(a+b), \quad (a-b)^2, \quad (a-b)^3, \quad (a-b)^4,$$
$$\log(a \cdot b) \text{ und } \log(a:b).$$

Durch diese elementaren Formeln allein kann man für die aufeinanderfolgenden Zahlen $x = 2$ bis zu be-

---

[1]) Leipzig 1903.

liebig großen Werten von x immer zwei Zahlen finden, von denen die eine kleiner, die andere größer ist als

$$\log x\,,$$

so daß der Unterschied der unteren und der oberen Grenze bei kleinem x nur wenige Hunderttausendtel oder Zehntausendtel beträgt, bei größer werdendem x aber doch noch immer viel kleiner bleibt als ein Tausendtel.

§ 2. Die drei Hauptformeln.

Da, wenn die positive ganze Zahl x größer wird, auch $\log x$ größer werden muß, so kann aus

$$x^2 > x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

geschlossen werden:

$$2\log x > \log(x-1) + \log(x+1)\,,$$

oder, wenn wir die Ungleichung so auf Null bringen, daß links Positives steht:

$$\text{(I)} \qquad 2\log x - \log(x-1) - \log(x+1) > 0\,.$$

Diese Ungleichung, die wir künftig Hauptformel (I) nennen wollen, besteht zwischen den Logarithmen von irgend welchen drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $x-1$, x, $x+1$.

Um eine ähnliche Ungleichung zwischen den Logarithmen von vier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen zu erzielen, gehen wir davon aus, daß:

$$x^3(x+2) > (x+1)^3(x-1) = (x+1)^2(x^2-1)$$

ist. Denn links kommt $x^4 + 2x^3$, rechts $x^4 + 2x^3 - 2x - 1$, so daß also

$x^3(x+2)$ um $2x+1$ größer ist als $(x+1)^3(x-1)$. Folglich ist:

$$\frac{x^3(x+2)}{(x+1)^3(x-1)} > 1 .$$

Durch Logarithmieren dieser Ungleichung erhalten wir:

$$\text{(II)} \qquad -\log(x-1) + 3\log x - 3\log(x+1) + \log(x+2) > 0 .$$

Diese Ungleichung, die zwischen den Logarithmen von irgend welchen vier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen besteht, soll im folgenden als Hauptformel (II) bezeichnet werden.

Um zur Hauptformel (III), die zwischen den Logarithmen von fünf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen besteht, zu gelangen, werden wir die mittlere Zahl x nennen, so daß die fünf Zahlen mit

$$x-2, \quad x-1, \quad x, \quad x+1, \quad x+2$$

zu bezeichnen sind. Da nun einerseits:

$$x^6(x-2)(x+2) = x^6(x^2-4) = x^8 - 4x^6$$

ist, andererseits:

$$(x-1)^4(x+1)^4$$
$$= (x^2-1)^4 = x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1$$

ist, so ist

$$x^6(x-2)(x+2) < (x-1)^4(x+1)^4 ,$$

nämlich um $6x^4 - 4x^2 + 1$, also um einen Ausdruck, der immer positiv bleibt. Demnach erhalten wir durch Logarithmieren:

$$6 \log x + \log(x-2) + \log(x+2) < 4 \log(x-1) + 4 \log(x+1)$$

oder, geordnet:

$$\text{(III)} \quad -\log(x-2) + 4\log(x-1) - 6\log x + 4\log(x+1) - \log(x+2) > 0\,.$$

Wir stellen nun die entwickelten drei Hauptformeln nochmals zusammen, indem wir immer die kleinste der aufeinanderfolgenden Zahlen y nennen. So erhalten wir:

$$\text{(I)} \quad -\log y + 2\log(y+1) - \log(y+2) > 0$$

$$\text{(II)} \quad -\log y + 3\log(y+1) - 3\log(y+2) + \log(y+3) > 0$$

$$\text{(III)} \quad -\log y + 4\log(y+1) - 6\log(y+2) + 4\log(y+3) - \log(y+4) > 0$$ [1].

---

[1]) Man bemerke, daß die auftretenden Koeffizienten (bei III: 1, 4, 6, 4, 1) die Binomialkoeffizienten sind, die sich auf einen und denselben Exponenten n beziehen. Daß das aus (I), (II), (III) ersichtliche Gesetz allgemein, für ein beliebiges n, und dann zwischen $n+1$ aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen gilt, habe ich in meinem Buche „Elementare Berechnung der Logarithmen" bewiesen. Dort ist auch bewiesen, daß der links vom Größerzeichen stehende Ausdruck zwar immer positiv bleibt, aber mit wachsendem y und mit wachsendem n sich der Null nähert. (Sieglitz-Satz.)

Meine Methode zur elementaren Berechnung von Grenzen, zwischen denen die Logarithmen der ganzen Zahlen liegen müssen, besteht nun darin, die Hauptformeln (I), (II), (III) auf beliebig gewählte Gruppen aufeinanderfolgender Zahlen anzuwenden und es durch Elimination zu erreichen, daß man auf eine Ungleichung von einer der beiden folgenden Formen kommt:

$$a \log x - b > 0 \quad \text{oder} \quad c - d \log x > 0 \, .$$

Je nachdem erhält man dann eine untere, d. h. zu kleine, oder eine obere, d. h. zu große Grenze. Man wird dabei darauf achten, daß eine untere Grenze besser ist, als eine andere, wenn sie größer ist, und daß eine obere Grenze an Güte dadurch gewinnt, daß sie kleiner ist. Bei der Auswahl der Gruppen aufeinanderfolgender Zahlen, auf welche (I), (II), (III) anzuwenden sind, wird man darauf zu achten haben, daß in diesen Zahlen möglichst wenig Primfaktoren vorkommen. Die Zahlen Zwei und Drei müssen natürlich bei der Anwendung jeder der drei Hauptformeln als Primfaktoren vorkommen, weil unter drei oder mehr aufeinanderfolgenden Zahlen mindestens eine Zahl durch Zwei bzw. Drei teilbar ist. Dabei braucht der Primfaktor 5 nicht beachtet zu werden, weil

$$5 = 10 : 2$$

und deshalb

$$\log 5 = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$$

ist.

Wenn man bei den Zahlengruppen, auf welche (I), (II), (III) anzuwenden sind, noch nicht sehr wählerisch ist, d. h. noch nicht genügend darauf achtet, daß die unteren Grenzen möglichst groß, die oberen Grenzen möglichst klein werden, der Grenzunterschied also möglichst klein wird, so wird man zwar immer zu Grenzen gelangen, dieselben werden einem aber nicht gefallen, weil sie zu wenig eng sind. Natürlich müssen Grenzen von log 2 und von log 3 zu allererst bestimmt werden, weil die kleinsten Primfaktoren 2, 3, 5 am meisten vorkommen müssen. Wir beginnen mit einer nicht guten Berechnung von Grenzen für log 2 und für log 3, indem wir nur eine dritte Unbekannte, nämlich log 7 hinzufügen, und die Zahlen, aus denen die Gruppen sich zusammensetzen, so klein wählen, daß eine gute Grenzbestimmung noch nicht erreichbar ist. Die folgende Berechnung soll also mehr als Beispiel für die Anwendung der drei Hauptformeln betrachtet werden, nicht aber der Erzielung guter Grenzen für log 2 und für log 3 dienen.

Man wende (III) auf die Zahlengruppe 3, 4, 5, 6, 7 an. Dann erhält man:

$$-\log 3 + 4\log 4 - 6\log 5 + 4\log 6 - \log 7 > 0$$

oder nach Zerlegung in Primfaktoren, Anwendung der Formel

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$$

und Ersetzen von $\log 5$ durch $1 - \log 2$:

$$-\log 3 + 8 \log 2 - 6(1 - \log 2) + 4 \log 2$$
$$+ 4 \log 3 - \log 7 > 0$$

oder:

$$(1) \qquad -6 + 18 \log 2 + 3 \log 3 - \log 7 > 0 .$$

Zweitens wenden wir die Hauptformel (II) auf die Zahlengruppe 7, 8, 9, 10 an. Dann erhalten wir:

$$-\log 7 + 3 \log 8 - 3 \log 9 + \log 10 > 0$$

oder:

$$-\log 7 + 9 \log 2 - 6 \log 3 + 1 > 0$$

oder:

$$(2) \qquad +1 + 9 \log 2 - 6 \log 3 - \log 7 > 0 .$$

Drittens wenden wir die Hauptformel (I) auf die Zahlengruppe 14, 15, 16 an, wodurch wir erhalten:

$$-\log 14 + 2 \log 15 - \log 16 > 0$$

oder:

$$-\log 2 - \log 7 + 2 \log 3 + 2(1 - \log 2) - 4 \log 2 > 0$$

oder:

$$(3) \qquad 2 - 7 \log 2 + 2 \log 3 - \log 7 > 0 .$$

Viertens wenden wir die Hauptformel (I) auf die Zahlengruppe 48, 49, 50 an, wodurch wir erhalten:

$$-\log 48 + 2 \log 49 - \log 50 > 0$$

oder:

$$-4\log 2 - \log 3 + 4\log 7 - 1 - (1 - \log 2) > 0$$

oder:

$$(4) \qquad -2 - 3\log 2 - \log 3 + 4\log 7 > 0\,.$$

Dadurch, daß wir bei der Wahl der Gruppen darauf achteten, daß nur die Zahlen 2, 3, 5, 7 als Primfaktoren vorkommen, haben wir vier Ungleichungen erhalten, in denen nur:

$$\log 2\,,\quad \log 3\,,\quad \log 7$$

als Unbekannte vorkommen. Aus den vier Ungleichungen kann man nun durch Elimination von $\log 7$ drei Ungleichungen erhalten, die nur $\log 2$ und $\log 3$ enthalten, und ausreichen, um für $\log 2$ und $\log 3$ je eine untere und eine obere Grenze zu ergeben. Man hat nämlich nur jede der drei Ungleichungen (1), (2), (3) mit vier zu multiplizieren, und die so erhaltenen Ungleichungen zu (4) zu addieren. Dadurch hebt sich $\log 7$ ganz heraus und man erhält:

$$(5) \qquad -26 + 69\log 2 + 11\log 3 > 0$$

$$(6) \qquad +\ \ 2 + 33\log 2 - 25\log 3 > 0$$

$$(7) \qquad +\ \ 6 - 31\log 2 + \ \ 7\log 3 > 0\,.$$

Dadurch, daß man nun (5) mit 25, (6) mit 11 multipliziert und addiert, wird $\log 3$ eliminiert und man erhält:

$$-628 + 2088\log 2 > 0$$

oder:

$$\log 2 > \frac{157}{522}.$$

Dadurch, daß man zweitens log 3 aus (6) und (7) eliminiert, erhält man:

$$164 - 544 \log 2 > 0$$

oder:

$$\log 2 < \frac{41}{136}.$$

Der Logarithmus der Zahl Zwei muß hiernach zwischen $\frac{157}{522}$ als unterer Grenze und $\frac{41}{136}$ als oberer Grenze liegen, oder:

$$0{,}300 < \log 2 < 0{,}302 .$$

Um log 3 zu berechnen, wird man log 2 eliminieren, und zwar einerseits aus (5) und (7), andererseits aus (6) und (7). So erhält man:

$$\frac{49}{103} < \log 3 < \frac{65}{136}$$

oder:

$$0{,}475 < \log 3 < 0{,}478 .$$

Wir haben also log 2 in zwei Grenzen eingeschlossen, die sich um zwei Tausendtel, log 3 in zwei Grenzen, die sich um drei Tausendtel unterscheiden.

In § 3 und in § 5 werden wir jedoch log 2 in Grenzen einschließen, die sich um vier Einhunderttausendtel, und log 3 in Grenzen, die sich um sechs Einhunderttausendtel unterscheiden.

Diese viel besseren Grenzen erreichen wir dadurch, daß wir die Zahlen, aus denen sich die Gruppen zusammensetzen, größer wählen. Freilich wird dadurch die Zahl der eingeführten Unbekannten und die Zahl der Ungleichungen, in denen sie vorkommen, etwas größer.

Gegen die oben erörterte Art, durch die drei Hauptformeln Ungleichungen zu finden, welche log 2 und log 3 je in zwei rationale Grenzen einschließen, könnte noch der Einwand erhoben werden, daß die Aufsuchung von Zahlengruppen wie 14, 15, 16 oder 48, 49, 50, in denen nur Zwei, Drei, Fünf, Sieben als Primfaktoren stecken, etwas Künstliches hat; und es könnte die Frage entstehen, ob nicht eine natürlichere, einheitlichere und leichter zu behaltende Methode auch zu Zahlengruppen führt, aus denen derartige Ungleichungen abgeleitet werden können. Diese Frage ist zu bejahen. Man kann nämlich auch nach folgender Regel verfahren:

Da die ersten zehn Zahlen keine anderen Primfaktoren als Zwei, Drei, Fünf und Sieben enthalten, so wähle man aus diesen diejenigen vier Gruppen von je fünf Zahlen aus, welche die größten Zahlen enthalten, also

3, 4, 5, 6, 7
4, 5, 6, 7, 8
5, 6, 7, 8, 9
6, 7, 8, 9, 10,

und wende auf jede Gruppe die Hauptformel (III) an. Wenn man dann die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen durch die Logarithmen der Primfaktoren 2, 3, 5, 7 ausdrückt und $\log 5$ durch $1 - \log 2$ ersetzt, erhält man vier Ungleichungen zwischen $\log 2$, $\log 3$, $\log 7$, aus denen man durch Elimination von zweien dieser drei Logarithmen für den dritten Logarithmus eine untere und eine obere Grenze erhält.

Auf solche Weise erhält man nämlich:

$$-6 + 18\log 2 + 3\log 3 - \log 7 > 0 \tag{8}$$

$$+4 - 15\log 2 - 6\log 3 + 4\log 7 > 0 \tag{9}$$

$$-1 + 17\log 2 + 2\log 5 - - 6\log 7 > 0 \tag{10}$$

$$-1 - 19\log 2 + 7\log 3 + 4\log 7 > 0\,. \tag{11}$$

Um nun z. B. $\log 7$ zu eliminieren, muß man von diesen vier Ungleichungen immer zwei solche auswählen, in denen $\log 7$ mit verschiedenen Vorzeichen auftritt, da ja wegen der vier Größerzeichen immer nur durch Addition eliminiert werden kann. Man fasse am einfachsten immer je zwei aufeinanderfolgende von den vier Ungleichungen zur Elimination zusammen. Wenn man immer durch Multiplikation die Koeffizienten von $\log 7$ gleich gemacht hat, erhält man durch Addition zweier aufeinanderfolgender von den vier Ungleichungen:

$$(12) \qquad -20 + 57 \log 2 + 6 \log 3 > 0$$
$$(13) \qquad +10 - 11 \log 2 - 14 \log 3 > 0$$
$$(14) \qquad -5 - 23 \log 2 + 25 \log 3 > 0 .$$

Um nun Grenzen für $\log 2$ zu erhalten, haben wir $\log 3$ zu eliminieren, und können dies wieder erreichen, indem wir immer bei zwei aufeinanderfolgenden Ungleichungen durch Multiplikation die Koeffizienten von $\log 3$ gleich machen und dann addieren. So kommt:

$$(15) \qquad -110 + 366 \log 2 > 0$$
$$(16) \qquad +180 - 597 \log 2 > 0$$

oder:

$$\frac{110}{366} = \frac{55}{183} < \log 2 < \frac{180}{597} = \frac{60}{199}$$

oder:

$$0{,}3005 < \log 2 < 0{,}3016 .$$

In ähnlicher Weise kann man Grenzen für $\log 3$ und $\log 7$ erhalten.

§ 3. Berechnung guter unterer Grenzen von log 2 und log 3.

Die in § 2 bewiesene Hauptformel (I) reicht aus, um zu guten unteren Grenzen von $\log 2$ und $\log 3$ zu gelangen, wenn man nur x hinreichend groß, also etwa dreiziffrig, wählt, und bei der Wahl von x darauf achtet, daß in x, $x-1$ und $x+1$ außer den

Primfaktoren Zwei und Drei nur möglichst wenige sonstige Primfaktoren vorkommen. Demgemäß setze man in Hauptformel (I) nacheinander $x = 243$, 121, 122, 123, 124, 1024. Dann erhält man:

$$- \log 242 + 2 \log 243 - \log 244 > 0$$
$$- \log 120 + 2 \log 121 - \log 122 > 0$$
$$- \log 121 + 2 \log 122 - \log 123 > 0$$
$$- \log 122 + 2 \log 123 - \log 124 > 0$$
$$- \log 123 + 2 \log 124 - \log 125 > 0$$
$$- \log 1023 + 2 \log 1024 - \log 1025 > 0 .$$

Wenn man jede der vorkommenden Zahlen 242, 243, 244, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 1023, 1024, 1025 in Primfaktoren zerlegt, und dann logarithmiert, erhält man links vom Größerzeichen jedesmal eine algebraische Summe von Vielfachen nur der folgenden als unbekannt zu betrachtenden Logarithmen:

$$\log 2 , \quad \log 3 , \quad \log 11 , \quad \log 31 , \quad \log 41 , \quad \log 61 .$$

Wir erhalten nämlich durch eine solche Zerlegung:

$$(1) \quad - \log 61 - 2 \log 11 + 10 \log 3 - 3 \log 2 > 0$$
$$(2) \quad - \log 61 + 4 \log 11 - \log 3 - 3 \log 2 - 1 > 0$$
$$(3) \quad + 2 \log 61 - \log 41 - 2 \log 11 - \log 3 + 2 \log 2 > 0$$
$$(4) \quad - \log 61 + 2 \log 41 - \log 31 + 2 \log 3 - 3 \log 2 > 0$$
$$(5) \quad - \log 41 + 2 \log 31 - \log 3 + 7 \log 2 - 3 > 0$$

$$(6) \qquad -\log 41 - \log 31 - \log 11 - \log 3 + 22\log 2 - 2 > 0 \, .$$

Da $5 = 10:2$, also $\log 5 = 1 - \log 2$ ist, so konnte $\log 5$ immer durch $1 - \log 2$ ersetzt werden.

Wir können nun $\log 31$, $\log 61$, $\log 41$, $\log 11$ nacheinander eliminieren, indem wir immer zwei Ungleichungen zusammenfassen, bei denen die Vorzeichen des zu eliminierenden Logarithmus entgegengesetzt sind, durch Multiplikation die beiden Koeffizienten dieses Logarithmus gleich machen und dann addieren. So erhalten wir, nach Elimination von $\log 31$ aus (4), (5), (6):

$$-\log 61 - 2\log 11 + 10\log 3 - 3\log 2 > 0$$

$$-\log 61 + 4\log 11 - \log 3 - 3\log 2 - 1 > 0$$

$$+2\log 61 - \log 41 - 2\log 11 - \log 3 + 2\log 2 > 0$$

$$-2\log 61 + 3\log 41 + 3\log 3 + \log 2 - 3 > 0$$

$$-3\log 41 - 2\log 11 - 3\log 3 + 51\log 2 - 7 > 0 \, .$$

Weiter erhalten wir durch Elimination von $\log 61$:

$$+2\log 41 - 2\log 11 + 2\log 3 + 3\log 2 - 3 > 0$$

$$-\log 41 + 6\log 11 - 3\log 3 - 4\log 2 - 2 > 0$$

$$-\log 41 - 6\log 11 + 19\log 3 - 4\log 2 > 0$$

$$-3\log 41 - 2\log 11 - 3\log 3 + 51\log 2 - 7 > 0 \, .$$

Durch Verbindung der ersten Ungleichung mit jeder der drei anderen, bewerkstelligen wir nun die Elimination von $\log 41$, und erhalten:

$$+10\log 11 - 4\log 3 - 5\log 2 - 7 > 0$$
$$-14\log 11 + 40\log 3 - 5\log 2 - 3 > 0$$
$$-10\log 11 + 111\log 2 - 23 > 0\,.$$

Wenn man nun noch log 11 eliminiert, erhält man:

$$\begin{cases} 43\log 3 - 15\log 2 - 16 > 0 & (7)\\ -4\log 3 + 106\log 2 - 30 > 0\,. & (8)\end{cases}$$

Aus dem so erhaltenen Ungleichungssystem kann man nun durch Elimination von log 3 eine untere Grenze von log 2 erhalten, aber auch durch Elimination von log 2 eine solche Grenze für log 3. So kommt:

$$+4498\log 2 - 1354 > 0 \quad \text{oder} \quad \log 2 > \frac{677}{2249} \tag{9}$$

oder:

$$0{,}30102 < \log 2\,. \tag{10}$$

Andererseits erhält man:

$$4498\log 3 - 2146 > 0 \quad \text{oder} \quad \log 3 > \frac{1073}{2249} \tag{11}$$

oder:

$$0{,}47710 < \log 3\,. \tag{12}$$

Wir können die gefundenen unteren Grenzen von log 2 und log 3 noch benutzen, um eine gute untere Grenze von log 11 festzustellen. log 11, log 2 und log 3 sind nämlich durch die oben abgeleitete Ungleichung:

$$+10\log 11 - 4\log 3 - 5\log 2 - 7 > 0$$

miteinander verbunden, so daß

$$10 \log 11 > 7 + 5 \log 2 + 4 \log 3$$

ist, wo rechts vom Größerzeichen zu kleine Werte eingesetzt werden dürfen. Setzt man die gefundenen fünfstelligen Dezimalbrüche ein, so erhält man:

$$1{,}04135 < \log 11 \, .$$

§ 4. Berechnung unterer Grenzen der Logarithmen der übrigen Primzahlen unter Hundert.

Mit Benutzung der Hauptformel (I) lassen sich nun auch für die Logarithmen der Primzahlen, die größer als 3 sind, gute untere Grenzen finden. Nur wird man diese Hauptformel nicht direkt auf die Primzahl, deren Logarithmus berechnet werden soll, sondern auf ihr Quadrat anwenden, namentlich wenn diese Primzahl noch klein ist. Da $x^2 = 49$ zwischen $x^2 - 1 = 48$ und $x^2 + 1 = 50$ liegt, und 48 und 50 keine anderen Primfaktoren als 2, 3 und $5 = 10:2$ enthalten, so läßt sich aus den in § 3 berechneten unteren Grenzen von $\log 2$ und $\log 3$ eine gute untere Grenze von $\log 7$ berechnen. Nach der Hauptformel (I) ist ja:

$$2 \log 49 > \log 48 + \log 50$$

oder:

$$4 \log 7 - \log 3 - 3 \log 2 - 2 > 0 \, . \tag{1}$$

Setzt man hier

$$\log 3 = 0{,}47710 \quad \text{und} \quad \log 2 = 0{,}30102 \, ,$$

was gestattet ist, weil diese in § 3 berechneten Werte zu klein sind, so erhält man:

$$4 \log 7 > 3{,}38016$$

oder:

(1a) $$\log 7 > 0{,}84504\,.$$

Nicht immer ist die Berechnung einer guten unteren Grenze so mühelos, wie bei $\log 7$, weil das Quadrat einer Primzahl nicht immer von zwei Zahlen eingeschlossen wird, die nur die Primfaktoren 2 und 3 enthalten. Beispielsweise wird der Gang der Berechnung einer unteren Grenze für $\log 53$ sich so gestalten: Da $53^2 = 2809$ ist, so ist nach Hauptformel (I):

$$4 \log 53 > \log 2808 + \log 2810$$

oder:

$$4 \log 53 > 3 \log 2 + 3 \log 3 + \log 13 + 1 + \log 281\,.$$

Wir multiplizieren mit zwei, setzen $\log 280 + \log 282$ für $2 \log 281$, zerlegen in Primfaktoren und erhalten:

$$8 \log 53 > 3 + 9 \log 2 + 6 \log 3 + 2 \log 13 + \log 7 + \log 141\,.$$

Wiederum multiplizieren wir mit zwei, setzen $\log 140 + \log 142$ für $2 \log 141$, zerlegen in Primfaktoren und erhalten:

$$16 \log 53 > 7 + 20 \log 2 + 12 \log 3 + 4 \log 13 + 3 \log 7 + \log 71\,.$$

Nun ist $4 \log 13 = 2 \log 169 > \log 168 + \log 170$. Folglich kommt:

$$16 \log 53 > 8 + 23 \log 2 + 13 \log 3 + 4 \log 7 + \log 17 + \log 71 \, .$$

Wenn wir nun nochmal mit zwei multiplizieren, $2 \log 17$ durch $\log 16 + \log 18$ und $2 \log 71$ durch $\log 70 + \log 72$ ersetzen und in Primfaktoren zerlegen, erhalten wir schließlich:

$$(2) \quad 32 \log 53 > 17 + 54 \log 2 + 30 \log 3 + 9 \log 7 \, .$$

So ist $\log 53$ allein durch $\log 2$, $\log 3$, $\log 7$ ausgedrückt, und zwar sind rechts vom Größerzeichen die unteren Grenzen zu setzen, und diese sind ja gerade oben berechnet. Durch Einsetzung dieser Werte ergibt sich:

$$\log 53 > \frac{1}{32}[16{,}25508 + 14{,}31300 + 7{,}60536 + 17]$$

oder:

$$\log 53 > \frac{1}{32} \cdot 55{,}17344$$

oder:

$$(2\text{a}) \qquad \log 53 > 1{,}72417 \, .$$

Nachdem nunmehr die unteren Grenzen von

$$\log 2 \, , \quad \log 3 \, , \quad \log 7 \, , \quad \log 53$$

berechnet sind, wird man $\log 29$, dann $\log 17$, dann $\log 13$, endlich $\log 19$ berechnen.

Man erhält nacheinander:

$$2 \log 841 > \log 840 + \log 842 \, ,$$

$$4 \log 29 > 1 + 3 \log 2 + \log 3 + \log 7 + \log 421 \, ,$$

$$8 \log 29 > 2 + 6 \log 2 + 2 \log 3 + 2 \log 7 + \log 420 + \log 422 ,$$

$$8 \log 29 > 3 + 8 \log 2 + 3 \log 3 + 3 \log 7 + \log 211 ,$$

$$16 \log 29 > 6 + 16 \log 2 + 6 \log 3 + 6 \log 7 + \log 210 + \log 212 ,$$

$$(3) \quad 16 \log 29 > 7 + 18 \log 2 + 7 \log 3 + 7 \log 7 + \log 53 .$$

Es sind nun rechts die schon berechneten unteren Grenzen von $\log 2$, $\log 3$, $\log 7$, $\log 53$ einzusetzen, so daß man erhält:

$$16 \log 29 > 23{,}39751$$

oder:

$$(3\text{a}) \qquad \log 29 > 1{,}46234 .$$

Für $\log 17$ gestaltet sich die Berechnung nun folgendermaßen:

$$2 \log 289 > \log 288 + \log 290 ,$$

$$(4) \quad 4 \log 17 > 1 + 5 \log 2 + 2 \log 3 + \log 29 ,$$

woraus, nach Einsetzung der unteren Grenzen von $\log 2$, $\log 3$, $\log 29$, die ja nunmehr sämtlich bekannt sind, folgt:

$$4 \log 17 > 4{,}92164$$

oder:

$$(4\text{a}) \qquad \log 17 > 1{,}23041 .$$

Da $13^2 = 169$ zwischen 170 und 168 liegt, und nunmehr, nach Berechnung einer unteren Grenze für $\log 17$, die unteren Grenzen der Logarithmen der in

168 und 170 steckenden Primfaktoren berechnet vorliegen, so folgt nun am besten die Berechnung einer unteren Grenze für log 13. Man erhält nacheinander:

$$2 \log 169 > 168 + \log 170 ,$$

$$(5) \quad 4 \log 13 > 1 + 3 \log 2 + \log 3 + \log 7 + \log 17$$

oder:

$$4 \log 13 > 4{,}45561$$

oder:

$$(5\text{a}) \qquad \log 13 > 1{,}11390 .$$

Für log 19 erhält man nun nacheinander:

$$2 \log 361 > 360 + \log 362 ,$$

$$4 \log 19 > 1 + 3 \log 2 + 2 \log 3 + \log 181 ,$$

$$8 \log 19 > 2 + 6 \log 2 + 4 \log 3 + \log 180 + \log 182 ,$$

$$(6) \quad 8 \log 19 > 3 + 8 \log 2 + 6 \log 3 + \log 7 + \log 13$$

oder:

$$8 \log 19 > 10{,}22970$$

oder:

$$(6\text{a}) \qquad \log 19 > 1{,}27871 .$$

Es folgt nunmehr am besten die Berechnung einer unteren Grenze von log 31. Um dieselbe gut, d. h. möglichst groß, zu erhalten, ist der folgende Berechnungsgang zweckmäßig:

$$2 \log 961 > \log 960 + \log 962 ,$$

$$4 \log 31 > 1 + 6 \log 2 + \log 3 + \log 481 ,$$

$$8 \log 31 > 2 + 12 \log 2 + 2 \log 3 + \log 480 + \log 482 ,$$

$$8 \log 31 > 3 + 17 \log 2 + 3 \log 3 + \log 241 ,$$

$$16 \log 31 > 6 + 34 \log 2 + 6 \log 3 + \log 240 + \log 242 ,$$

$$16 \log 31 > 7 + 38 \log 2 + 7 \log 3 + 2 \log 11 . \tag{7}$$

Nun stehen rechts nur die Logarithmen von zwei, drei und elf. Die unteren Grenzen dieser Logarithmen sind aber sämtlich bekannt; denn auch für log 11 ist schon in § 3 die untere Grenze:

$$1{,}04135$$

berechnet. Setzt man demgemäß in (7) rechts ein, so erhält man:

$$16 \log 31 > 23{,}86116$$

oder:

$$\log 31 > 1{,}49132 . \tag{7a}$$

Auf die soeben erhaltene untere Grenze von log 31 läßt sich nun die von log 61 zurückführen. Denn:

$$2 \log 3721 > \log 3720 + \log 3722$$

$$4 \log 61 > 1 + 3 \log 2 + \log 3 + \log 31 + \log 1861 ,$$

$$8 \log 61 > 2 + 6 \log 2 + 2 \log 3 + 2 \log 31 + \log 1860 + \log 1862 ,$$

$$8 \log 61 > 3 + 8 \log 2 + 3 \log 3 + 2 \log 7 + \log 19 + 3 \log 31 \tag{8}$$

oder:

$$8 \log 61 > 14{,}28221$$

oder:

$$\log 61 > 1{,}78527 . \tag{8a}$$

Wir lassen nun die Berechnung der unteren Grenze von log 23 folgen, und dann erst die von log 37, weil der rechts vom Größerzeichen bei log 37 stehende Ausdruck log 23 enthält.

Wir erhalten nacheinander:

$$2 \log 529 > \log 528 + \log 530 ,$$

(9) $$4 \log 23 > 1 + 4 \log 2 + \log 3 + \log 11 + \log 53$$

oder:

$$4 \log 23 > 5{,}44670$$

oder:

(9a) $$\log 23 > 1{,}36167$$

Da $37^2 = 1369$ ist, so haben wir anzusetzen:

$$2 \log 1369 > \log 1368 + \log 1370 ,$$

$$4 \log 37 > 1 + 3 \log 2 + 2 \log 3 + \log 19 + \log 137 ,$$

$$8 \log 37 > 2 + 6 \log 2 + 4 \log 3 + 2 \log 19 + \log 136 + \log 138 ,$$

(10) $$8 \log 37 > 2 + 10 \log 2 + 5 \log 3 + 2 \log 19 + \log 17 + \log 23$$

oder, nach Einsetzung der schon in fünfstelligen Dezimalbrüchen berechneten unteren Grenzen:

$$8 \log 37 > 12{,}54520$$

oder:

(10a) $$\log 37 > 1{,}56815 .$$

Nunmehr sind für die folgenden Primzahlen die unteren Grenzen ihrer Logarithmen berechnet:

2, 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 53, 61,

wozu noch 5 tritt, weil $\log 5 = 1 - \log 2$ ist, nur daß hierdurch aus der unteren Grenze von $\log 2$ nicht auf die untere von $\log 5$, sondern nur auf die obere geschlossen werden kann. Während wir bei den bisher berücksichtigten Primzahlen auf die Reihenfolge etwas achten mußten, weil die untere Grenze eines Logarithmus sich öfter durch die untere Grenze eines andern ausdrücken ließ, und deshalb in dem oben eingeschlagenen Berechnungswege die Primzahlen, von deren Logarithmus die untere Grenze zu berechnen war, nicht in ihrer natürlichen Reihenfolge aufeinanderfolgten, so brauchen wir von jetzt an nicht mehr auf die Reihenfolge zu achten, sondern berücksichtigen die Primzahlen, wie sie in ihrer Größe aufeinanderfolgen. Demnach haben wir von den Primzahlen unter Hundert noch die folgenden zu berücksichtigen:

41, 43, 47, 59, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Wiederum gehen wir stets von den Quadraten dieser Zahlen aus, genau wie oben, um die unteren Grenzen ihrer Logarithmen dadurch zu verbessern. Da die obigen Berechnungen hinreichend viele Beispiele dafür zeigen, wie auf der rechten Seite des Größerzeichens die Summe von Vielfachen von unteren Grenzen entsteht, so beschränken wir uns von jetzt an auf die Angabe dieser Summe und des ihr gleichen fünfstelligen Dezimalbruches:

(11) $$32 \log 41 > 15 + 50 \log 2 + 15 \log 3 + 15 \log 7 + \log 53$$

oder:

(11a) $$\log 41 > 1{,}61272\,.$$

(12) $$4 \log 43 > 2 + 2 \log 2 + \log 3 + \log 7 + \log 11 + \log 37$$

oder:

(12a) $$\log 43 > 1{,}63342\,.$$

(13) $$4 \log 47 > 1 + 5 \log 2 + \log 3 + \log 13 + \log 17 + \log 23$$

oder:

(13a) $$\log 47 > 1{,}67204\,.$$

(14) $$32 \log 59 > 15 + 40 \log 2 + 17 \log 3 + \log 11 + 14 \log 29$$

oder:

(14a) $$\log 59 > 1{,}77080\,.$$

(15) $$8 \log 67 > 4 + 11 \log 2 + 4 \log 3 + \log 7 + 2 \log 11 + 2 \log 17$$

oder:

(15a) $$\log 67 > 1{,}82602\,.$$

(16) $$64 \log 71 > 31 + 106 \log 2 + 61 \log 3 + 30 \log 7 + \log 13$$

oder:

(16a) $$\log 71 > 1{,}85119\,.$$

(17) $$16 \log 73 > 5 + 25 \log 2 + 12 \log 3 + 2 \log 7 + \log 11 + 2 \log 19 + 4 \log 37$$

oder:

$$\log 73 > 1{,}86325\,. \tag{17a}$$

$$16 \log 79 > 6 + 34 \log 2 + 7 \log 3 + 3 \log 7 + 6 \log 13 + \log 37\,. \tag{18}$$

oder:

$$\log 79 > 1{,}89756\,. \tag{18a}$$

$$16 \log 83 > 9 + 28 \log 2 + 5 \log 3 + 2 \log 23 + 5 \log 43 \tag{19}$$

oder:

$$\log 83 > 1{,}91903\,. \tag{19a}$$

$$32 \log 89 > 13 + 52 \log 2 + 24 \log 3 + 5 \log 7 + 12 \log 11 + 3 \log 71 \tag{20}$$

oder:

$$\log 89 > 1{,}94932\,. \tag{20a}$$

$$32 \log 97 > 13 + 66 \log 2 + 15 \log 3 + 16 \log 7 + 3 \log 13 + 4 \log 47 \tag{21}$$

oder:

$$\log 97 > 1{,}98669\,.$$

Nachdem nunmehr die unteren Grenzen der Logarithmen aller Primzahlen unter Hundert durch die Hauptformel (I) berechnet sind, stellen wir die erhaltenen Werte noch einmal, nach der Größe dieser Primzahlen geordnet, tabellarisch zusammen.

Liste der berechneten unteren Grenzen aller[1]) Primzahlen unter Hundert.

$\log 2 > 0{,}30102$	$\log 29 > 1{,}46234$	$\log 61 > 1{,}78527$
$\log 3 > 0{,}47710$	$\log 31 > 1{,}49132$	$\log 67 > 1{,}82602$
$\log 7 > 0{,}84504$	$\log 37 > 1{,}56815$	$\log 71 > 1{,}85119$
$\log 11 > 1{,}04135$	$\log 41 > 1{,}61272$	$\log 73 > 1{,}86325$
$\log 13 > 1{,}11390$	$\log 43 > 1{,}63342$	$\log 79 > 1{,}89756$
$\log 17 > 1{,}23041$	$\log 47 > 1{,}67204$	$\log 83 > 1{,}91903$
$\log 19 > 1{,}27871$	$\log 53 > 1{,}72417$	$\log 89 > 1{,}94932$
$\log 23 > 1{,}36167$	$\log 59 > 1{,}77080$	$\log 97 > 1{,}98669$

§ 5. Berechnung guter oberer Grenzen von log 2 und log 3.

Um eine gute obere Grenze von log 2 zu gewinnen, wenden wir die Hauptformel (II) auf die Zahlengruppe 123, 124, 125, 126 an. Dadurch erhalten wir:

$$-\log 123 + 3\log 124 - 3\log 125 + \log 126 > 0\,.$$

Dazu fügen wir die Anwendung der Hauptformel (I) auf die Zahlengruppe 124, 125, 126:

$$-\log 124 + 2\log 125 - \log 126 > 0\,.$$

---

[1]) Nur die untere Grenze von log 5 fehlt noch, weil sie sich durch $\log 5 = 1 - \log 2$ aus der noch zu berechnenden oberen Grenze von log 2 ergibt.

Aus beiden Ungleichungen folgt durch Elimination von $\log 124$:

$$-\log 123 + 3\log 125 - 2\log 126 > 0$$

oder, nach Zerlegung in Primfaktoren und Ersetzen von $\log 5$ durch $1 - \log 2$:

$$-\log 41 - 2\log 7 - 5\log 3 - 11\log 2 + 9 > 0\,.$$

Diese Ungleichung verbinden wir mit

$$\log 1025 - \log 1024 > 0$$

oder:

$$+\log 41 - 12\log 2 + 2 > 0\,.$$

Dadurch wird $\log 41$ eliminiert, und es kommt:

$$-2\log 7 - 5\log 3 - 23\log 2 + 11 > 0\,.$$

Verbinden wir diese Ungleichung mit derjenigen, die entsteht, wenn wir die Hauptformel (I) auf $x = 49$ anwenden, und die lautet:

$$4\log 7 - \log 3 - 3\log 2 - 2 > 0\,,$$

so erhalten wir:

$$-11\log 3 - 49\log 2 + 20 > 0\,. \tag{1}$$

Eine zweite Ungleichung zwischen $\log 2$ und $\log 3$ erhalten wir dadurch, daß wir die Ungleichung

$$\log 1025 - \log 1024 > 0$$

mit der Anwendung der Hauptformel (I) auf $x = 81$ verbinden. Dadurch kommt, wegen der Zerlegung in Primfaktoren:

$$+\log 41 - 12\log 2 + 2 > 0$$

und:

$$-\log 41 + 8\log 3 - 4\log 2 - 1 > 0\,.$$

Nun entsteht die gesuchte zweite Ungleichung zwischen $\log 2$ und $\log 3$ dadurch, daß wir diese beiden Ungleichungen addieren. So kommt:

$$(2) \qquad 8\log 3 - 16\log 2 + 1 > 0\,.$$

Multiplizieren wir nun (1) mit acht, (2) mit elf und addieren dann, so erhalten wir:

$$-568\log 2 + 171 > 0$$

oder:

$$\log 2 < \frac{171}{568}\,.$$

Also ist

$$\log 2 < 0{,}30106\,.$$

Die gefundene obere Grenze von $\log 2$ ist nur um vier Hunderttausendtel größer als die in § 3 gefundene untere Grenze.

Um nun auch für $\log 3$ eine gute obere Grenze zu finden, wenden wir die Hauptformel (II) auf die Zahlengruppe $79, 80, 81 = 3^4, 82$ an. Wir erhalten so:

$$-\log 79 + 3\log 80 - 3\log 81 + \log 82 > 0$$

oder:

$$(3) \quad -\log 79 + \log 41 - 12\log 3 + 10\log 2 + 3 > 0\,.$$

Da wegen der ersten Hauptformel $2\log 79$ größer als die Summe $\log 78 + \log 80$ ist, so multiplizieren wir (3) mit zwei und erhalten:

$$(4)\qquad -\log 80 - \log 78 + 2\log 41 - 24\log 3 + 20\log 2 + 6 > 0\,.$$

Nach Zerlegung von 80 und von 78 in Primfaktoren, kommt nun aus (4):

$$(5)\qquad +2\log 41 - \log 13 - 25\log 3 + 16\log 2 + 5 > 0\,.$$

Da $\log 41$ links vom Größerzeichen positiv vorkommt, man also nur Größeres dafür setzen darf, so wenden wir die Hauptformel (II) auf die Zahlengruppe 39, 40, 41, 42 an. Dadurch erhalten wir:

$$(6)\qquad -3\log 41 - \log 13 + \log 7 + 7\log 2 + 3 > 0\,.$$

Um nun aus (5) und (6) $\log 41$ zu eliminieren, haben wir (5) mit drei, (6) mit zwei zu multiplizieren und dann zu addieren. So kommt:

$$(7)\qquad 75\log 3 < 21 + 62\log 2 + 2\log 7 - 5\log 13\,.$$

Rechts vom Größerzeichen steht $\log 2$ und $\log 7$ mit positiven Vorzeichen. Von $\log 2$ ist oben schon eine obere Grenze berechnet, noch nicht aber von $\log 7$. Wir wenden deshalb nochmal die Hauptformel (II) an, und zwar auf die Zahlengruppe 47, 48, 49, 50. So erhalten wir nacheinander:

$$3\log 49 < 3\log 48 + \log 50 - \log 47$$

$$(8)\qquad 6\log 7 < 2 + 11\log 2 + 3\log 3 - \log 47\,.$$

Addiert man nun das Dreifache von (7) zu (8), so erhält man:

$$225 \log 3 < 63 + 186 \log 2 - 15 \log 13 + 2$$
$$+ 11 \log 2 + 3 \log 3 - \log 47$$

oder:

$$222 \log 3 < 65 + 197 \log 2 - 15 \log 13 - \log 47 .$$

Hier sind rechts für $\log 13$ und für $\log 47$ die in § 4 berechneten unteren Grenzen, für $\log 2$ die hier oben berechnete obere Grenze einzusetzen. So erhält man:

$$222 \log 3 < 105{,}92828$$

oder:

$$\log 3 < 0{,}47716 . \tag{9}$$

Die soeben gefundene obere Grenze von $\log 3$ ist nur um sechs Hunderttausendtel größer als die in § 3 berechnete untere Grenze.

Die in § 3 und hier gefundenen Resultate über $\log 2$ und $\log 3$ fassen wir noch zusammen zu:

$$0{,}30102 < \log 2 < 0{,}30106$$
$$0{,}47710 < \log 3 < 0{,}47716 .$$

Da $\log 2 = 1 - \log 5$ ist, so können wir über $\log 5$ noch hinzufügen:

$$0{,}69894 < \log 5 < 0{,}69898 .$$

§ 6. Berechnung oberer Grenzen der Logarithmen der übrigen Primzahlen unter Hundert.

In § 5 sind für $\log 2$ und für $\log 3$ obere Grenzen berechnet. Um zu den übrigen von den gesuchten

oberen Grenzen zu gelangen, reicht es meist aus, wenn man die Hauptformel (III) direkt auf die Primzahl anwendet, für deren Logarithmus eine obere Grenze gesucht wird. Nur bei einigen Primzahlen ziehen wir es vor, von deren Quadraten auszugehen.

Durch Anwendung der Hauptformel (III) auf die Zahl $7^2 = 49$ erhalten wir nacheinander:

$$6 \log 49 < 4 (\log 48 + \log 50) - \log 47 - \log 51 \,,$$

$$12 \log 7 < 12 \log 2 + 8 + 4 \log 3 - \log 47 - \log 3 - \log 17 \,,$$

(1) $$12 \log 7 < 8 + 12 \log 2 + 3 \log 3 - \log 17 - \log 47 \,.$$

Für $\log 2$ und $\log 3$ sind hier die in § 5 berechneten oberen Grenzen, für $\log 17$ und $\log 47$ die in § 4 berechneten unteren Grenzen einzusetzen, so daß wir erhalten:

$$12 \log 7 < 10{,}14175$$

oder

(1 a) $$\log 7 < 0{,}84515 \,.$$

Wenn wir die obere Grenze von $\log 11$ aus $\log 121$ berechnen wollten, müßten wir schon eine obere Grenze von $\log 61$ kennen, weil $121 + 1 = 122 = 2 \cdot 61$ ist. Wir ziehen es deshalb vor, $\log 11$ direkt zu berechnen. Man erhält:

(2) $6 \log 11 < 4 \log 10 + 4 \log 12 - \log 9 - \log 13$

oder:

$$6 \log 11 < 4 + 8 \log 2 + 2 \log 3 - \log 13$$

oder:

$$6 \log 11 < 6{,}24890$$

oder:

(2a) $$\log 11 < 1{,}04149 \,.$$

Um nun sowohl $\log 17$, als auch $\log 13$ aus den Quadraten $17^2 = 289$, $13^2 = 169$ berechnen zu können, berechnen wir zunächst eine obere Grenze für $\log 29$, und zwar direkt, mit Anwendung der Hauptformel III:

(3) $$6 \log 29 < 4 \log 28 + 4 \log 30 - \log 27 - \log 31$$

oder:

$$6 \log 29 < 4 + 8 \log 2 + \log 3 + 4 \log 7 - \log 31$$

oder:

(3a) $$\log 29 < 1{,}46249 \,.$$

Mit Benutzung der soeben gefundenen oberen Grenze von $\log 29$ kann man eine obere Grenze des Logarithums von $289 = 17^2$ finden, und dadurch auch eine gute obere Grenze von $\log 17$. Man erhält:

(4) $$12 \log 17 < 4 + 20 \log 2 + 7 \log 3 + 4 \log 29 \\ - \log 7 - \log 41 - \log 97 \,,$$

wo für $\log 2$, $\log 3$, $\log 29$ die oberen Grenzen, für $\log 7$, $\log 41$, $\log 97$ die schon in § 4 gefundenen unteren Grenzen zu setzen sind. So erhält man:

(4a) $$\log 17 < 1{,}23057 \,.$$

Da $13^2 = 169 = 17 \cdot 10 - 1$ ist, so kann man

nunmehr eine gute obere Grenze für log 13 aus log 169 berechnen. Man erhält nach Zusammenfassung:

$$12 \log 13 < 12 \log 2 + 2 \log 3 + 4 \log 7 + 4 + 4 \log 17 - \log 19 - \log 167 .$$

Da die untere Grenze von log 167 noch nicht berechnet ist, so multiplizieren wir mit zwei, um 2 log 167 durch die kleinere Summe log 166 + log 168 ersetzen zu können. So kommt:

$$(5) \quad 24 \log 13 < 8 + 20 \log 2 + 3 \log 3 + 7 \log 7 + 8 \log 17 - 2 \log 19 - \log 83$$

oder:

$$(5a) \quad \log 13 < 1{,}11404 .$$

Nun berechnen wir eine obere Grenze für log 23, und zwar direkt aus der Zahlengruppe 21, 22, 23, 24, 25. Wir erhalten:

$$(6) \quad 6 \log 23 < -2 + 18 \log 2 + 3 \log 3 + 4 \log 11 - \log 7$$

oder:

$$(6a) \quad \log 23 < 1{,}36190 .$$

Auf die soeben berechnete obere Grenze läßt sich nun die Berechnung einer guten oberen Grenze von log 47 zurückführen, und zwar dadurch daß wir von $47^2 = 2209$ ausgehen. Wir erhalten nacheinander:

$$12 \log 47 < 4 \log 2208 + 4 \log 2210 - \log 2207 - \log 2211 ,$$

$$12 \log 47 < 4 \log 23 + 3 \log 3 + 20 \log 2 + 4 + 4 \log 13 + 4 \log 17 - \log 2207 - \log 11 - \log 67 ,$$

$$24 \log 47 < 8 + 34 \log 2 + 6 \log 3 + 8 \log 13 + 8 \log 17 + 8 \log 23 - 2 \log 11 - 2 \log 67 - \log 1103 - \log 23 - \log 3 ,$$

$$48 \log 47 < 16 + 68 \log 2 + 10 \log 3 + 16 \log 13 + 16 \log 17 + 16 \log 23 - 4 \log 11 - 4 \log 67 - 2 \log 23 - \log 1102 - \log 1104 ,$$

$$48 \log 47 < 16 + 63 \log 2 + 9 \log 3 + 16 \log 13 + 16 \log 17 + 13 \log 23 - 4 \log 11 - \log 19 - \log 29 - 4 \log 67 \tag{7}$$

oder:

$$\log 47 < 1{,}67228 . \tag{7a}$$

Da wir die obere Grenze von $\log 53$ aus $\log (53^2) = \log 2809$ berechnen wollen, und da $53^2 + 1 = 10 \cdot 281$ ist, so berechnen wir vorher $\log 281$. Wir erhalten nacheinander:

$$6 \log 281 < 4 \log 280 + 4 \log 282 - \log 279 - \log 283 ,$$

$$6 \log 281 < 4 + 12 \log 2 + 4 \log 7 + 2 \log 3 + 4 \log 47 - \log 31 - \log 283 ,$$

$$12 \log 281 < 8 + 21 \log 2 + 3 \log 3 + 8 \log 7 + 7 \log 47 - 2 \log 31 - \log 71$$

oder:

$$\log 281 < 2{,}44893 .$$

Nunmehr erhalten wir aus:

$$6 \log 2809 < 4 \log 2810 + 4 \log 2808 - \log 2807 - \log 2811$$

nacheinander:

$$12 \log 53 < 12 \log 2 + 11 \log 3 + 4 \log 13 + 4 + 4 \log 281 - \log 7 - \log 937 - \log 401 ,$$

(8) $$24 \log 53 < 6 + 17 \log 2 + 19 \log 3 + 8 \log 13 + 8 \log 281 - 3 \log 7 - \log 13 - 2 \log 67$$

oder:

(8a) $$\log 53 < 1{,}72445 .$$

Vorher konnten wir die obere Grenze von log 23 noch nicht von neuem bestimmen, weil $23^2 = 10 \cdot 53 - 1$ ist, und von log 53 noch keine obere Grenze berechnet vorlag. Jetzt können wir die obere Grenze von log 23 dadurch verbessern, daß wir von 23^2 ausgehen. Wir erhalten:

$$6 \log 529 < 4 \log 528 + 4 \log 530 - \log 527 - \log 531$$

oder:

(9) $$12 \log 23 < 4 + 16 \log 2 + 2 \log 3 + 4 \log 11 + 4 \log 53 - \log 17 - \log 31 - \log 59 ,$$

woraus folgt:

(9a) $$\log 23 < 1{,}36188 .$$

Hierdurch ist die oben gefundene obere Grenze von log 23 um zwei Hunderttausendstel verbessert. Natürlich kann nun wieder (7) benutzt werden, um zu versuchen, ob auch die obere Grenze von log 47

dadurch besser ausfällt, daß wir in (7) die verbesserte obere Grenze von log 23 einsetzen. Wir erhalten aus (7)

$$(10) \qquad \log 47 < 1{,}67227 .$$

Wenn man dann weiter auch noch die oberen Grenzen von log 281 und log 53 zu verbessern sucht, erkennt man, daß die Verbesserung die fünfte Dezimalstelle nicht mehr zu erniedrigen vermag. Wir haben uns also mit den drei Resultaten:

$$\log 23 < 1{,}36188 ; \quad \log 47 < 1{,}67227 ;$$
$$\log 53 < 1{,}72445$$

zu begnügen.

Die obere Grenze von log 31 berechnen wir nun direkt, und zwar nach Hauptformel (II) am besten. Es kommt:

$$3 \log 31 < 3 \log 30 + \log 32 - \log 29$$

oder:

$$(11) \quad 3 \log 31 < 3 + 5 \log 2 + 3 \log 3 - \log 29 ,$$

woraus folgt:

$$(11a) \qquad \log 31 < 1{,}49148 .$$

Durch die obere Grenze von log 31 läßt sich nun die von log 61 berechnen, und zwar direkt durch Hauptformel (III). Man erhält:

$$6 \log 61 < 4 \log 60 + 4 \log 62 - \log 59 - \log 63$$

oder:

(12) $$6 \log 61 < 4 + 8 \log 2 + 2 \log 3 + 4 \log 31 - \log 59 - \log 7$$

oder:

(12a) $$\log 61 < 1{,}78548\,.$$

Von den kleineren Primzahlen ist 19 noch nicht berücksichtigt. Man erhält durch Hauptformel (III):

$$6 \log 19 < 4 \log 18 + 4 \log 20 - \log 17 - \log 21$$

oder:

(13) $$6 \log 19 < + 4 + 8 \log 2 + 7 \log 3 - \log 7 - \log 17$$

oder:

(13a) $$\log 19 < 1{,}27886\,.$$

Auch von log 37 berechnen wir die obere Grenze direkt durch Hauptformel (III). Wir erhalten:

$$6 \log 37 < 4 \log 36 + 4 \log 38 - \log 35 - \log 39$$

oder:

(14) $$6 \log 37 < 13 \log 2 + 7 \log 3 + 4 \log 19 - 1 - \log 7 - \log 13$$

oder:

(14a) $$\log 37 < 1{,}56840\,.$$

Für die nächste Primzahl 41 erhalten wir:

$$6 \log 41 < 4 \log 40 + 4 \log 42 - \log 39 - \log 43$$

oder:

(15) $$6 \log 41 < 4 + 12 \log 2 + 3 \log 3 + 4 \log 7 - \log 13 - \log 43$$

oder:

$$\text{(15a)} \qquad \log 41 < 1{,}61292\,.$$

Für log 43 erhalten wir die obere Grenze durch Anwendung der Hauptformel (III) folgendermaßen:

$$6 \log 43 < 4 \log 42 + 4 \log 44 - \log 41 - \log 45$$

oder:

$$\text{(16)} \qquad 6 \log 43 < 13 \log 2 + 2 \log 3 + 4 \log 7 + 4 \log 11 - 1 - \log 41$$

oder:

$$\text{(16a)} \qquad \log 43 < 1{,}63366\,.$$

Ebenso folgt für 59:

$$6 \log 59 < 4 \log 58 + 4 \log 60 - \log 57 - \log 61$$

oder:

$$\text{(17)} \qquad 6 \log 59 < 4 + 8 \log 2 + 3 \log 3 + 4 \log 29 - \log 19 - \log 61$$

oder:

$$\text{(17a)} \qquad \log 59 < 1{,}77099\,.$$

Die Primzahlen, von deren Logarithmen oben obere Grenzen berechnet sind, sind, nach der Größe geordnet, folgende:

2, 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61.

Es fehlen daher von den Primzahlen unter Hundert nur noch:

67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Da bei keiner der schon untersuchten Primzahlen die hier berechnete obere Grenze ihres Logarithmus

um mehr als 28 Hunderttausendtel größer ist, als die in § 4 berechnete untere Grenze, so wollen wir dafür sorgen, daß auch bei den noch zu untersuchenden Primzahlen der Grenzunterschied ihres Logarithmus unter 30 Hunderttausendtel, also unter drei Zehntausendtel bleibt. Dies ist dadurch erreichbar, daß wir die Hauptformel (III) auf

$$71, \ 79, \ 83, \ 89$$

direkt anwenden, daß wir aber, um eine obere Grenze von

$$\log 67, \quad \log 73, \quad \log 97$$

zu finden, die die soeben genannte Bedingung erfüllt, die Hauptformel (III) auf

$$67^2 = 4489, \quad 73^2 = 5329, \quad 97^2 = 9409$$

anwenden.

Für log 71 erhalten wir:

$$6 \log 71 < 4 \log 70 + 4 \log 72 - \log 69 - \log 73$$

oder:

$$6 \log 71 < 4 + 12 \log 2 + 7 \log 3 + 4 \log 7 - \log 23 - \log 73 \tag{18}$$

oder:

$$\log 71 < 1{,}85142 \,. \tag{18a}$$

Ferner:

$$6 \log 79 < 4 \log 78 + 4 \log 80 - \log 77 - \log 81$$

oder:

(19) $$6 \log 79 < 16 \log 2 + 4 + 4 \log 13 - \log 7 - \log 11$$

oder:

(19a) $$\log 79 < 1{,}89770\,.$$

Dann:

$$6 \log 83 < 4 \log 82 + 4 \log 84 - \log 81 - \log 85$$

oder:

(20) $$6 \log 83 < -1 + 13 \log 2 + 4 \log 7 + 4 \log 41 - \log 17\,,$$

also:

(20a) $$\log 83 < 1{,}91928\,.$$

Endlich:

$$6 \log 89 < 4 \log 88 + 4 \log 90 - \log 87 - \log 91$$

oder:

(21) $$6 \log 89 < 12 \log 2 + 4 \log 11 + 4 + 7 \log 3 - \log 29 - \log 7 - \log 13\,,$$

also:

(21a) $$\log 89 < 1{,}94959\,.$$

Mühsamer ist die Berechnung der oberen Grenzen der Logarithmen der drei noch nicht untersuchten Primzahlen 67, 73, 97.

Für log 67 erhalten wir nacheinander:

$$6 \log 4489 < 4 \log 4488 + 4 \log 4490 - \log 4487 - \log 4491\,,$$

$$12 \log 67 < 4 + 12 \log 2 + 2 \log 3 + 4 \log 11 + 4 \log 17 + 4 \log 449 - \log 4487 - \log 499\,.$$

Da wegen des voranstehenden Pluszeichens für log 449 eine obere Grenze einzusetzen ist, so ist zur Berechnung derselben eine besondere Untersuchung notwendig. Dagegen kann man die mit Minuszeichen versehenen log 4487 und log 499 durch Hauptformel (I) leicht auf die in § 4 berechneten unteren Grenzen zurückführen. Denn es folgt nun durch Verdoppelung:

$$24 \log 67 < 5 + 20 \log 2 + 2 \log 3 + 7 \log 11 + 7 \log 17 + 8 \log 449 - \log 2243 - \log 83$$

und durch nochmalige Verdoppelung:

$$48 \log 67 < 10 + 37 \log 2 + 3 \log 3 + 13 \log 11 + 13 \log 17 + 16 \log 449 - 2 \log 83 - \log 19 - \log 59 \,. \tag{22}$$

Um eine obere Grenze für log 449 zu finden, wenden wir die Hauptformel (III) direkt auf 449 an. Wir erhalten:

$$6 \log 449 < 4 \log 448 + 4 \log 450 - \log 447 - \log 451$$

oder:

$$6 \log 449 < 8 + 20 \log 2 + 4 \log 7 + 7 \log 3 - \log 149 - \log 451 \,,$$

also durch Verdoppelung und Anwendung von Hauptformel (I):

$$12 \log 449 < 12 + 38 \log 2 + 11 \log 3 + 8 \log 7 - \log 37 - \log 113 \,,$$

und hieraus durch dasselbe Verfahren:

$$(23)\qquad 24 \log 449 < 24 + 71 \log 2 + 21 \log 3 + 15 \log 7 - 2 \log 37 - \log 19\,,$$

woraus folgt:

$$(23\text{a})\qquad \log 449 < 2{,}65242\,.$$

Nunmehr ist alles vorbereitet, um aus (22) log 67 zu berechnen. Man erhält:

$$(22\text{a})\qquad \log 67 < 1{,}82623$$

Bei der Berechnung einer oberen Grenze von log 73 erhalten wir durch Hauptformel (III) hinter Pluszeichen nur solche Logarithmen, deren obere Grenzen schon berechnet vorliegen. Denn:

$$6 \log 5329 < 4 \log 5328 + 4 \log 5330 - \log 5327 - \log 5331\,,$$

$$12 \log 73 < 4 + 16 \log 2 + 7 \log 3 + 4 \log 13 + 4 \log 37 + 4 \log 41 - \log 5327 - \log 1777\,,$$

woraus durch Verdoppelung und Anwendung von Hauptformel (I) entsteht:

$$24 \log 73 < 8 + 22 \log 2 + 11 \log 3 + 8 \log 13 + 6 \log 37 + 8 \log 41 - \log 2663 - \log 889\,,$$

und, nach nochmaliger Anwendung desselben Verfahrens:

$$(24)\quad 48 \log 73 < 15 + 37 \log 2 + 19 \log 3 + 16 \log 13 + 10 \log 37 + 16 \log 41 - 3 \log 11 - \log 89\,,$$

woraus, durch Einsetzen der berechneten Grenzen, kommt:

$$(24\text{a})\qquad \log 73 < 1{,}86349\,.$$

Für log 97 erhalten wir zunächst:

$$6 \log 9409 < 4 \log 9408 + 4 \log 9410 - \log 9407 - \log 9411$$

oder:

$$12 \log 97 < 4 + 24 \log 2 + 3 \log 3 + 8 \log 7 + 4 \log 941 - \log 9407 - \log 3137 .$$

Da wir eine obere Grenze von log 941 nötig haben, wenden wir Hauptformel (III) auf 941 an, wodurch wir erhalten:

$$6 \log 941 < 4 \log 940 + 4 \log 942 - \log 939 - \log 943$$

oder:

$$6 \log 941 < 4 + 8 \log 2 + 4 \log 47 + 3 \log 3 + 4 \log 157 - \log 313 - \log 943 .$$

Wir erkennen, daß wir nun wieder die Berechnung einer oberen Grenze von log 157 nötig haben, und setzen demgemäß an:

$$6 \log 157 < 4 \log 156 + 4 \log 158 - \log 155 - \log 159$$

oder:

$$(25) \quad 6 \log 157 < 13 \log 2 + 3 \log 3 + 4 \log 13 + 4 \log 79 - 1 - \log 31 - \log 53.$$

So ist nunmehr log 157 nur durch Logarithmen ausgedrückt, deren Grenzen berechnet vorliegen. Man erhält nach Einsetzung derselben:

$$(25\text{a}) \qquad \log 157 < 2{,}19613 .$$

Um hieraus eine obere Grenze für log 941 zu gewinnen, verdoppeln wir den oben als obere Grenze

von 6 log 941 gefundenen Ausdruck, um Hauptformel (I) anwenden zu können, und erhalten so:

$$(26)\quad 12 \log 941 < 8 + 7 \log 2 + 4 \log 3 + 8 \log 47 + 6 \log 157 - \log 13 - \log 59$$

oder:

$$(26a)\quad \log 941 < 2{,}97386\,.$$

Nunmehr, nachdem die zur Berechnung einer oberen Grenze von log 97 nötigen oberen Grenzen berechnet sind, verdoppeln wir die oben für 12 log 97 aufgestellte Ungleichung, um die Hauptformel (I) anwenden zu können. Dann erhält man durch Vereinfachung:

$$24 \log 97 < 8 + 34 \log 2 + 4 \log 3 + 12 \log 7 + 8 \log 941 - \log 4703 - \log 523\,.$$

Wenden wir nun dasselbe Verfahren nochmal an, erhalten wir:

$$48 \log 97 < 16 + 59 \log 2 + 5 \log 3 + 22 \log 7 + 16 \log 941 - \log 2351 - \log 29 - \log 131\,.$$

Wir haben dasselbe Verfahren zum dritten Male anzuwenden, um endlich hinter den Minuszeichen Logarithmen zu erhalten, deren untere Grenzen in § 4 berechnet sind. So kommt:

$$(27)\quad 96 \log 97 < 29 + 113 \log 2 + 8 \log 3 + 42 \log 7 + 32 \log 941 - \log 47 - 2 \log 29 - \log 13 - \log 11\,,$$

woraus durch Einsetzen folgt:

$$(27a)\quad \log 97 < 1{,}98693\,.$$

Da nunmehr von den Logarithmen aller Primzahlen unter Hundert obere Grenzen berechnet sind, so stellen wir dieselben noch, nach ihrer Größe geordnet, zum Schluß zusammen.

Liste der berechneten oberen Grenzen aller Primzahlen unter Hundert.

$\log 2 < 0{,}30106$	$\log 23 < 1{,}36188$	$\log 61 < 1{,}78548$
$\log 3 < 0{,}47716$	$\log 29 < 1{,}46249$	$\log 67 < 1{,}82623$
$\log 5 < 0{,}69898$[1]	$\log 31 < 1{,}49148$	$\log 71 < 1{,}85142$
$\log 7 < 0{,}84515$	$\log 37 < 1{,}56840$	$\log 73 < 1{,}86349$
$\log 11 < 1{,}04149$	$\log 41 < 1{,}61292$	$\log 79 < 1{,}89770$
$\log 13 < 1{,}11404$	$\log 43 < 1{,}63366$	$\log 83 < 1{,}91928$
$\log 17 < 1{,}23057$	$\log 47 < 1{,}67227$	$\log 89 < 1{,}94959$
$\log 19 < 1{,}27886$	$\log 53 < 1{,}72445$	$\log 97 < 1{,}98693$
	$\log 59 < 1{,}77099$	

§ 7. Tafel der unteren und oberen Grenzen für die Logarithmen aller Zahlen unter Hundert.

Nachdem in § 4 untere Grenzen, in § 6 obere Grenzen für die Logarithmen aller ein- und zweiziffrigen Primzahlen berechnet sind, können wir jeden

[1] Diese obere Grenze von $\log 5$ folgt durch $\log 5 = 1 - \log 2$ aus der in § 3 berechneten unteren Grenze 0,30102 von $\log 2$. Ebenso folgt aus der in § 5 berechneten oberen Grenze 0,30106 von $\log 2$ die untere Grenze 0,69894 von $\log 5$, die man der Liste in § 4 hinzuzufügen hat.

solchen Logarithmus in zwei Grenzen einschließen. Und, da der Logarithmus einer zusammengesetzten Zahl die Summe vom Vielfachen ihrer Primfaktoren ist, weil

$$\log (a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \ldots) = \alpha \log a + \beta \log b + \gamma \log c + \ldots$$

ist, so können wir auch ohne Mühe solche Grenzen für die Logarithmen aller zusammengesetzten Zahlen unter Hundert angeben. Diese Grenzangaben folgen nun hier, und zwar sind die Zahlen, deren Logarithmen in Grenzen eingeschlossen sind, nach ihrer natürlichen Reihenfolge geordnet. Die bei jeder Grenzangabe in Klammer beigesetzte Zahl gibt an, um wieviel Hunderttausendtel die obere Grenze größer als die untere ist. Da keine der beigesetzten Zahlen die Zahl 30 erreicht, so konstatieren wir das Resultat: Lediglich mit Hilfe der elementaren Formeln für $(a+b)(a-b)$, $(a-b)^2$, $(a-b)^3$, $(a-b)^4$ und für das Logarithmieren gelingt es, den Logarithmus jeder Zahl, die kleiner als Hundert ist, in zwei Grenzen einzuschließen, die sich um weniger als drei Zehntausendtel unterscheiden.

Logarithmentafel, elementar berechnet.

$$0{,}00000 = \log 1 = 0{,}00000 \quad (0)$$

$$0{,}30102 < \log 2 < 0{,}30106 \quad (4)$$

$$0{,}47710 < \log 3 < 0{,}47716 \quad (6)$$

$$0{,}60204 < \log 4 < 0{,}60212 \quad (8)$$
$$0{,}69894 < \log 5 < 0{,}69898 \quad (4)$$
$$0{,}77812 < \log 6 < 0{,}77822 \quad (10)$$
$$0{,}84504 < \log 7 < 0{,}84515 \quad (11)$$
$$0{,}90306 < \log 8 < 0{,}90318 \quad (12)$$
$$0{,}95420 < \log 9 < 0{,}95432 \quad (12)$$
$$1{,}00000 = \log 10 = 1{,}00000 \quad (0)$$
$$1{,}04135 < \log 11 < 1{,}04149 \quad (14)$$
$$1{,}07914 < \log 12 < 1{,}07928 \quad (14)$$
$$1{,}11390 < \log 13 < 1{,}11404 \quad (14)$$
$$1{,}14606 < \log 14 < 1{,}14621 \quad (15)$$
$$1{,}17604 < \log 15 < 1{,}17614 \quad (10)$$
$$1{,}20408 < \log 16 < 1{,}20424 \quad (16)$$
$$1{,}23041 < \log 17 < 1{,}23057 \quad (16)$$
$$1{,}25522 < \log 18 < 1{,}25538 \quad (16)$$
$$1{,}27871 < \log 19 < 1{,}27886 \quad (15)$$
$$1{,}30102 < \log 20 < 1{,}30106 \quad (4)$$
$$1{,}32214 < \log 21 < 1{,}32231 \quad (17)$$
$$1{,}34237 < \log 22 < 1{,}34255 \quad (18)$$
$$1{,}36167 < \log 23 < 1{,}36188 \quad (21)$$
$$1{,}38016 < \log 24 < 1{,}38034 \quad (18)$$
$$1{,}39788 < \log 25 < 1{,}39796 \quad (8)$$
$$1{,}41492 < \log 26 < 1{,}41510 \quad (18)$$
$$1{,}43130 < \log 27 < 1{,}43148 \quad (18)$$

$1{,}44708 < \log 28 < 1{,}44727$ (19)

$1{,}46234 < \log 29 < 1{,}46249$ (15)

$1{,}47710 < \log 30 < 1{,}47716$ (6)

$1{,}49132 < \log 31 < 1{,}49148$ (16)

$1{,}50510 < \log 32 < 1{,}50530$ (20)

$1{,}51845 < \log 33 < 1{,}51865$ (20)

$1{,}53143 < \log 34 < 1{,}53163$ (20)

$1{,}54398 < \log 35 < 1{,}54413$ (15)

$1{,}55624 < \log 36 < 1{,}55644$ (20)

$1{,}56815 < \log 37 < 1{,}56840$ (25)

$1{,}57973 < \log 38 < 1{,}57992$ (19)

$1{,}59100 < \log 39 < 1{,}59120$ (20)

$1{,}60204 < \log 40 < 1{,}60212$ (8)

$1{,}61272 < \log 41 < 1{,}61292$ (20)

$1{,}62316 < \log 42 < 1{,}62337$ (21)

$1{,}63342 < \log 43 < 1{,}63366$ (24)

$1{,}64339 < \log 44 < 1{,}64361$ (22)

$1{,}65314 < \log 45 < 1{,}65330$ (16)

$1{,}66269 < \log 46 < 1{,}66294$ (25)

$1{,}67204 < \log 47 < 1{,}67227$ (23)

$1{,}68118 < \log 48 < 1{,}68140$ (22)

$1{,}69008 < \log 49 < 1{,}69030$ (22)

$1{,}69894 < \log 50 < 1{,}69898$ (4)

$1{,}70751 < \log 51 < 1{,}70773$ (22)

$$1{,}71594 < \log 52 < 1{,}71616 \quad (22)$$
$$1{,}72417 < \log 53 < 1{,}72445 \quad (28)$$
$$1{,}73232 < \log 54 < 1{,}73254 \quad (22)$$
$$1{,}74029 < \log 55 < 1{,}74047 \quad (18)$$
$$1{,}74810 < \log 56 < 1{,}74833 \quad (23)$$
$$1{,}75581 < \log 57 < 1{,}75602 \quad (21)$$
$$1{,}76336 < \log 58 < 1{,}76355 \quad (19)$$
$$1{,}77080 < \log 59 < 1{,}77099 \quad (19)$$
$$1{,}77812 < \log 60 < 1{,}77822 \quad (10)$$
$$1{,}78527 < \log 61 < 1{,}78548 \quad (21)$$
$$1{,}79234 < \log 62 < 1{,}79254 \quad (20)$$
$$1{,}79924 < \log 63 < 1{,}79947 \quad (23)$$
$$1{,}80612 < \log 64 < 1{,}80636 \quad (24)$$
$$1{,}81284 < \log 65 < 1{,}81302 \quad (18)$$
$$1{,}81947 < \log 66 < 1{,}81971 \quad (24)$$
$$1{,}82602 < \log 67 < 1{,}82623 \quad (21)$$
$$1{,}83245 < \log 68 < 1{,}83269 \quad (24)$$
$$1{,}83877 < \log 69 < 1{,}83904 \quad (27)$$
$$1{,}84504 < \log 70 < 1{,}84515 \quad (11)$$
$$1{,}85119 < \log 71 < 1{,}85142 \quad (23)$$
$$1{,}85726 < \log 72 < 1{,}85750 \quad (24)$$
$$1{,}86325 < \log 73 < 1{,}86349 \quad (24)$$
$$1{,}86917 < \log 74 < 1{,}86946 \quad (29)$$
$$1{,}87498 < \log 75 < 1{,}87512 \quad (14)$$

$$1{,}88075 < \log 76 < 1{,}88098 \quad (23)$$
$$1{,}88639 < \log 77 < 1{,}88664 \quad (25)$$
$$1{,}89202 < \log 78 < 1{,}89226 \quad (24)$$
$$1{,}89756 < \log 79 < 1{,}89770 \quad (14)$$
$$1{,}90306 < \log 80 < 1{,}90318 \quad (12)$$
$$1{,}90840 < \log 81 < 1{,}90864 \quad (24)$$
$$1{,}91374 < \log 82 < 1{,}91398 \quad (24)$$
$$1{,}91903 < \log 83 < 1{,}91928 \quad (25)$$
$$1{,}92418 < \log 84 < 1{,}92443 \quad (25)$$
$$1{,}92935 < \log 85 < 1{,}92955 \quad (20)$$
$$1{,}93444 < \log 86 < 1{,}93472 \quad (28)$$
$$1{,}93944 < \log 87 < 1{,}93965 \quad (21)$$
$$1{,}94441 < \log 88 < 1{,}94467 \quad (26)$$
$$1{,}94932 < \log 89 < 1{,}94959 \quad (27)$$
$$1{,}95420 < \log 90 < 1{,}95432 \quad (12)$$
$$1{,}95894 < \log 91 < 1{,}95919 \quad (25)$$
$$1{,}96371 < \log 92 < 1{,}96400 \quad (29)$$
$$1{,}96842 < \log 93 < 1{,}96864 \quad (22)$$
$$1{,}97306 < \log 94 < 1{,}97333 \quad (27)$$
$$1{,}97765 < \log 95 < 1{,}97784 \quad (19)$$
$$1{,}98220 < \log 96 < 1{,}98246 \quad (26)$$
$$1{,}98669 < \log 97 < 1{,}98693 \quad (24)$$
$$1{,}99110 < \log 98 < 1{,}99136 \quad (26)$$
$$1{,}99555 < \log 99 < 1{,}99581 \quad (26)$$

§ 8. Die unteren und oberen Grenzen für die Logarithmen aller Zahlen über Hundert.

Die im vorangehenden nur bis $x = 100$ durchgeführte Berechnung unterer und oberer Grenzen von $\log x$, läßt sich auch über $x = 100$ hinaus beliebig weit fortsetzen; nur wird man, wenn x mehr als drei Ziffern hat, die auf die drei ersten Ziffern folgenden durch Nullen ersetzen, und dabei die dritte Ziffer unverändert lassen oder um eins erhöhen, je nachdem die vorgelegte Zahl der kleineren von den beiden so entstehenden Zahlen oder der größeren näher ist. Durch eine solche Abrundung gewinnt man immer eine mit einer Potenz von zehn multiplizierte dreiziffrige Zahl, von deren Logarithmus man die untere und die obere Grenze zu berechnen hat. Durch Erhöhung der vor dem Komma stehenden Kennziffer gewinnt man dann hinreichend gute Grenzen für $\log x$, wo x mehr als drei Ziffern hat. Es reicht deshalb vollkommen aus, wenn man die Anwendung der Hauptformeln (I, II, III) nur bis $x = 1000$ fortsetzt. Man hat es bei dieser Anwendung aber insofern viel bequemer, als man weder bei der Berechnung der unteren noch der Berechnung der oberen Grenzen nötig hat, von dem Quadrate der Zahl auszugehen, deren Logarithmus zu bestimmen ist. Man kann vielmehr zur Berechnung der unteren Grenze von $\log x$ stets die Hauptformel (I) auf x direkt anwenden,

und zur Bestimmung der oberen Grenze die Hauptformel (II) oder (III), je nachdem (II) oder (III) zu einer besseren oberen Grenze führt. Da

$$\log(2x) = \log x + \log 2$$

ist, so wird man zuerst von den Logarithmen der geraden Zahlen die unteren und die oberen Grenzen berechnen, indem man zu den Grenzen für die berechnet vorliegenden Logarithmen ihrer Hälften die untere bzw. die obere Grenze von log 2 addiert, also

0,30102 bzw. 0,30106.

Nachdem die Grenzen für die Logarithmen aller geraden Zahlen berechnet sind, berechne man zuerst die unteren Grenzen der Logarithmen der ungeraden Zahlen nach Hauptformel (I), indem man also immer das arithmetische Mittel der auf die beiden benachbarten geraden Zahlen bezüglichen unteren Grenzen nimmt, und dies tue man nicht allein bei den Logarithmen der ungeraden Primzahlen, sondern auch bei den Logarithmen der ungeraden zusammengesetzten Zahlen[1]), weil meist die so erreichte untere Grenze größer, also besser wird, als wenn man für

[1]) Bei einer nicht gedruckten Besprechung meines Buches „Elementare Berechnung der Logarithmen" schlug Herr Braun-Trier mir vor, die Logarithmen der ungeraden zusammengesetzten Zahlen nicht aus den Logarithmen ihrer Primfaktoren zu berechnen, sondern die in dem Buche bewiesene Tripelformel auch auf ungerade zusammengesetzte Zahlen anzuwenden.

den Logarithmus einer ungeraden zusammengesetzten Zahl eine untere Grenze durch Addition der unteren Grenzen finden wollte, die sich auf die Logarithmen der in der zusammengesetzten Zahl steckenden Primfaktoren beziehen. Nur wenn einer dieser Primfaktoren 5 ist, prüfe man erst, ob die auf dem einen oder anderen Wege erreichte untere Grenze die bessere ist.

Was aber die oberen Grenzen der Logarithmen der zusammengesetzten ungeraden Zahlen anbetrifft, so fällt meist diejenige obere Grenze besser aus, die man durch deren Primfaktoren erhält, als die Grenze, die man durch die Hauptformel (II) oder (III) erhält.

Für den Logarithmus einer ungeraden dreiziffrigen Primzahl gibt es natürlich keinen anderen Weg, zu einer oberen Grenze zu gelangen, als durch Hauptformel (II) oder (III). Dabei liefert Hauptformel (III) fast immer die bessere obere Grenze. Als Beispiel wählen wir $\log 199$. Die untere Grenze ergibt sich durch Hauptformel (I) als arithmetisches Mittel von $\log 198$ und $\log 200$, also:

$$2 \log 199 > \log 198 + \log 200 \, .$$

Bei einer planmäßigen Berechnung, bei welcher die unteren Grenzen der Logarithmen der geraden Zahlen schon vorliegen, wenn für die ungeraden Zahlen die unteren Grenzen ihrer Logarithmen zu berechnen sind, ist die Berechnung aus $\log 198$ und $\log 200$ unmittelbar möglich. Hier aber müssen wir 198 und 200 in Primfaktoren zerlegen, und erhalten so:

$$2 \log 199 > 2 + 2 \log 2 + 2 \log 3 + \log 11$$

oder:

$$\log 199 > 2{,}29879 .$$

Eine obere Grenze von log 199 erhalten wir durch Hauptformel (III) auf folgende Weise:

$$6 \log 199 < 4 \log 198 + 4 \log 200 - \log 197 - \log 201$$

oder:

$$6 \log 199 < 8 + 8 \log 2 + 7 \log 3 + 4 \log 11 - \log 197 - \log 67 .$$

In dieser Ungleichung sind für log 2, log 3, log 11 obere Grenzen, für log 67 und log 197 untere Grenzen einzusetzen. Da von log 197 noch keine untere Grenze hier berechnet vorliegt, berechnen wir sie aus:

$$2 \log 197 > \log 196 + \log 198$$

oder:

$$2 \log 197 > 3 \log 2 + 2 \log 3 + 2 \log 7 + \log 11$$

oder:

$$\log 197 > 2{,}29434 .$$

Durch Einsetzen ergibt sich nun:

$$6 \log 199 < 13{,}79420$$

oder:

$$\log 199 < 2{,}29904 .$$

Also lautet unser Resultat über log 199:

$$2{,}29879 < \log 199 < 2{,}29904 .$$

Der Grenzunterschied beträgt also: 25 Einhunderttausendtel.

Im folgenden sind nun von den Logarithmen der dreiziffrigen Zahlen sieben Dekaden unterer und oberer Grenzen nach der eben besprochenen Methode berechnet, und zwar sind es:

$$\log 110 \text{ bis } \log 120\,, \quad \log 120 \text{ bis } \log 130\,,$$
$$\log 160 \text{ bis } \log 170\,, \quad \log 240 \text{ bis } \log 250\,,$$
$$\log 330 \text{ bis } \log 340\,, \quad \log 490 \text{ bis } \log 500$$

und endlich die letzte Dekade der dreiziffrigen Zahlen:

$$\log 990 \text{ bis } \log 1000\,.$$

Man wird erkennen, daß die Grenzunterschiede mit der Größe der Zahlen durchschnittlich etwas steigen, aber 43 Hunderttausendtel nicht übersteigen. Unsere Methode, die Logarithmen ganz elementar zu berechnen, läßt also für den Logarithmus jeder beliebigen Zahl, auch wenn sie vielziffrig ist, eine untere und eine obere Grenze finden, so daß der Unterschied zweier solcher Grenzen viel kleiner bleibt als ein Tausendtel und einige wenige Zehntausendtel nicht übersteigt. Die in Klammer jeder Grenzangabe beigesetzte Zahl gibt den Grenzunterschied wieder in Hunderttausendteln an.

(1)

$$2{,}04135 < \log 110 < 2{,}04149 \quad (14)$$
$$2{,}04525 < \log 111 < 2{,}04556 \quad (31)$$

$2{,}04912 < \log 112 < 2{,}04939$ (27)

$2{,}05297 < \log 113 < 2{,}05323$ (26)

$2{,}05683 < \log 114 < 2{,}05708$ (25)

$2{,}06061 < \log 115 < 2{,}06086$ (25)

$2{,}06438 < \log 116 < 2{,}06461$ (23)

$2{,}06810 < \log 117 < 2{,}06836$ (26)

$2{,}07182 < \log 118 < 2{,}07205$ (23)

$2{,}07548 < \log 119 < 2{,}07572$ (24)

$2{,}07914 < \log 120 < 2{,}07928$ (14)

(2)

$2{,}07914 < \log 120 < 2{,}07928$ (14)

$2{,}08271 < \log 121 < 2{,}08298$ (27)

$2{,}08629 < \log 122 < 2{,}08654$ (25)

$2{,}08982 < \log 123 < 2{,}09008$ (26)

$2{,}09336 < \log 124 < 2{,}09360$ (24)

$2{,}09682 < \log 125 < 2{,}09694$ (12)

$2{,}10026 < \log 126 < 2{,}10053$ (27)

$2{,}10370 < \log 127 < 2{,}10407$ (37)

$2{,}10714 < \log 128 < 2{,}10742$ (28)

$2{,}11052 < \log 129 < 2{,}11082$ (30)

$2{,}11390 < \log 130 < 2{,}11404$ (14)

(3)

$2{,}20127 < \log 159$ [1])

$2{,}20408 < \log 160 < 2{,}20424$ (16)

$2{,}20675 < \log 161 < 2{,}20703$ (28)
$2{,}20942 < \log 162 < 2{,}20970$ (28)
$2{,}21209 < \log 163 < 2{,}21247$ (38)
$2{,}21476 < \log 164 < 2{,}21504$ (28)
$2{,}21740 < \log 165 < 2{,}21763$ (23)
$2{,}22005 < \log 166 < 2{,}22034$ (29)
$2{,}22262 < \log 167 < 2{,}22299$ (37)
$2{,}22520 < \log 168 < 2{,}22549$ (29)
$2{,}22780 < \log 169 < 2{,}22808$ (28)
$2{,}23041 < \log 170 < 2{,}23057$ (16)

(4)

$2{,}37833 < \log 239$ [1])
$2{,}38016 < \log 240 < 2{,}38034$ (18)
$2{,}38194 < \log 241 < 2{,}38225$ (31)
$2{,}38373 < \log 242 < 2{,}38404$ (31)
$2{,}38552 < \log 243 < 2{,}38580$ (28)
$2{,}38731 < \log 244 < 2{,}38760$ (29)
$2{,}38907 < \log 245 < 2{,}38931$ (24)
$2{,}39084 < \log 246 < 2{,}39114$ (30)
$2{,}39261 < \log 247 < 2{,}39299$ (38)
$2{,}39438 < \log 248 < 2{,}39466$ (28)
$2{,}39613 < \log 249 < 2{,}39644$ (31)
$2{,}39788 < \log 250 < 2{,}39796$ (8)

(5)

$2{,}51711 < \log 329$ [1])

$2{,}51845 < \log 330 < 2{,}51865$ (20)

$2{,}51976 < \log 331 < 2{,}52011$ (35)

$2{,}52107 < \log 332 < 2{,}52140$ (33)

$2{,}52235 < \log 333 < 2{,}52272$ (37)

$2{,}52364 < \log 334 < 2{,}52405$ (41)

$2{,}52493 < \log 335 < 2{,}52521$ (28)

$2{,}52622 < \log 336 < 2{,}52655$ (33)

$2{,}52752 < \log 337 < 2{,}52795$ (43)

$2{,}52882 < \log 338 < 2{,}52914$ (32)

$2{,}53012 < \log 339 < 2{,}53039$ (27)

$2{,}53143 < \log 340 < 2{,}53163$ (20)

(6)

$2{,}68920 < \log 489$ [1])

$2{,}69008 < \log 490 < 2{,}69030$ (22)

$2{,}69097 < \log 491 < 2{,}69134$ (37)

$2{,}69186 < \log 492 < 2{,}69220$ (34)

$2{,}69274 < \log 493 < 2{,}69306$ (32)

$2{,}69363 < \log 494 < 2{,}69405$ (42)

$2{,}69451 < \log 495 < 2{,}69479$ (28)

$2{,}69540 < \log 496 < 2{,}69572$ (32)

$2{,}69627 < \log 497 < 2{,}69657$ (30)

$2{,}69715 < \log 498 < 2{,}69750$ (35)
$2{,}69804 < \log 499 < 2{,}69829$ (25)
$2{,}69894 < \log 500 < 2{,}69898$ (4)

(7)

$2{,}99510 < \log 989$
$2{,}99555 < \log 990 < 2{,}99581$ (26)
$2{,}99598 < \log 991 < 2{,}99639$ (41)
$2{,}99642 < \log 992 < 2{,}99678$ (36)
$2{,}99685 < \log 993 < 2{,}99727$ (42)
$2{,}99729 < \log 994 < 2{,}99763$ (34)
$2{,}99773 < \log 995 < 2{,}99802$ [2]) (29)
$2{,}99817 < \log 996 < 2{,}99856$ (39)
$2{,}99861 < \log 997 < 2{,}99903$ (42)
$2{,}99906 < \log 998 < 2{,}99935$ (29)
$2{,}99953 < \log 999 < 2{,}99988$ (35)
$3{,}00000 = \log 1000 = 3{,}00000$ (0).

---

[1]) Wenn zur Berechnung der oberen Grenze des Logarithmus der zweiten Zahl einer Dekade die untere Grenze des Logarithmus der Zahl nötig war, die der ersten Zahl dieser Dekade vorangeht, so ist diese untere Grenze auch vorangestellt.

[2]) Diese obere Grenze ist Summe der oberen Grenze des Logarithmus der Zahl Fünf und der oberen Grenze von log 199, die oben als Beispiel berechnet ist.

II. Abschnitt.

Die Siebzehnteilung des Kreises.

§ 1. Einleitung.

Die Entdeckung des jugendlichen Carl Friedrich Gauß, daß es gelingt, die Gleichung

$$x^{17} = 1$$

lediglich mit Hilfe von quadratischen Gleichungen zu lösen, und daß es dadurch möglich ist, mit alleiniger Anwendung von Zirkel und Lineal die Peripherie eines Kreises in 17 gleiche Teile zu teilen, hat vor etwa hundert Jahren die Aufmerksamkeit aller Mathematiker erregt. Das Interesse, das diese Entdeckung jedem Mathematiker einflößt, beruht auf zweierlei, erstens darauf, daß das Problem der Kreisteilung, das schon bei den alten Griechen eine Rolle gespielt und zu der stetigen Teilung oder dem „goldnen Schnitt" geführt hatte, das aber dann zwei Jahrtausende hindurch in keiner Weise gefördert war, plötzlich durch Gauß einen so schönen Abschluß fand, zweitens auch darauf, daß durch die Gaußsche Entdeckung zwischen zwei scheinbar verschiedenartigen Problemen, dem

algebraischen Problem, die Gleichung $x^n = 1$ zu lösen, und dem planimetrischen Problem, einem Kreise ein regelmäßiges Polygon von n Seiten einzuzeichnen, ein enger Zusammenhang festgestellt war. Nicht mit Unrecht hat man daher auf dem Sockel des Denkmals von Friedrich Gauß, das seine Vaterstadt Braunschweig ziert, ein reguläres Siebzehneck angebracht, um den Beschauer an eine der ersten und schönsten Entdeckungen des „princeps mathematicorum" zu erinnern.

Bei dem Interesse, das diese Entdeckung jedem einflößt, dessen mathematische Vorbildung ausreicht, um sie in ihrer Bedeutung zu erfassen, habe ich mich, seit meinen jüngsten Jahren, immer bemüht, sowohl in der obersten Stufe des Schulunterrichts als auch in meinen Vorlesungen über Algebra die Lösung der Gleichung $x^{17} = 1$, und, im Zusammenhang damit, die Siebzehnteilung des Kreises in möglichst einfacher Weise vorzutragen.

§ 2. Kreisteilungsgleichungen.

Im Zusammenhang mit der Darstellung der komplexen Zahlen durch Punkte einer Ebene läßt sich folgendes zeigen: [1]) Die Gleichung $x^p = 1$, wo p eine Primzahl ist, wird durch die Zahl Eins und

[1]) Vgl. hierüber § 18 und § 19 des zweiten Teils meiner „Niederen Analysis" (Sammlung Schubert, Band 45).

$p-1$ komplexe Zahlen erfüllt. Diese $p-1$ komplexen Zahlen können mit:

$$\varepsilon^1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3, \ldots,\ \varepsilon^{p-1}$$

bezeichnet werden, wenn ε irgend eine von ihnen ist.

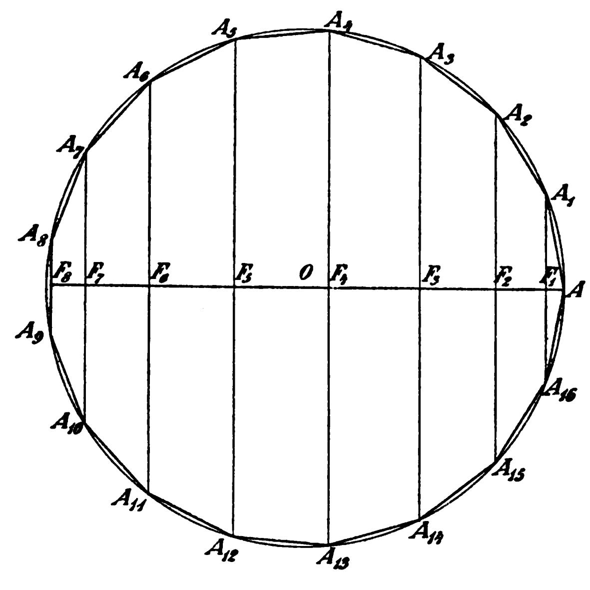


Fig. 1.

Die Punkte, welche die p Wurzeln der Gleichung $x^p = 1$ darstellen, liegen sämtlich auf einem Kreise, dessen Radius die Einheitsstrecke ist, und teilen diesen Kreis in p gleiche Teile. Das Zentrum dieses Kreises

sei O, der Punkt, der Bild der Zahl Eins ist, sei A, der darauf folgende Kreisteilungspunkt muß ε^1 darstellen und soll A_1 heißen, usw., so daß A_m die komplexe Zahl ε^m darstellt. Man erkennt, daß A_m und A_{p-m} konjugiert-komplexe Zahlen darstellen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß die Verbindungslinie von A_m und A_{p-m} auf der Richtung OA senkrecht ist. So entstehen $\frac{1}{2}(p-1)$ derartiger Verbindungslinien. Die Schnittpunkte derselben mit dem Durchmesser OB, auf dem OA liegt, mögen der Reihe nach

$$F_1, \quad F_2, \quad F_3, \ldots, F_{\frac{p-1}{2}}$$

heißen. Da $\varepsilon^m = 1$ sein muß, so kann jedes ε^m, wo $m > \frac{1}{2}(p-1)$ ist, auch mit $\varepsilon^{-m} = \varepsilon^{p-m}$ bezeichnet werden. Wenn man nun die Summe

$$\varepsilon^m + \varepsilon^{-m}$$

mit η_m bezeichnet, so erhält man $\frac{p-1}{2}$ Zahlen η, die sämtlich reell sein müssen, weil ε^{+m} und ε^{-m} konjugiert-komplexe Zahlen sind; und zwar muß in der geometrischen Zahldarstellung

$$\eta_m \text{ das Doppelte von } OF_m$$

sein, so daß, wenn wir die Strecke, die bei dieser Darstellung Eins bedeutet, mit r bezeichnen,

$$r \cdot \eta_m = 2 \cdot OF_m \tag{1}$$

sein muß. Wenn nun die $\frac{1}{2}(p-1)$ reellen Zahlen:

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \ldots, \eta_{\frac{p-1}{2}}$$

gefunden sind, so folgen aus ihnen die $p-1$ komplexen Zahlen:

$$\varepsilon^1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{p-1}$$

durch quadratische Gleichungen, weil:

$$\varepsilon^m + \varepsilon^{-m} = \eta_m$$

oder:

$$(\varepsilon^m)^2 - \eta_m \cdot \varepsilon^m + 1 = 0$$

sein muß. Behufs Auffindung der mit η bezeichneten $\frac{1}{2}(p-1)$ Zahlen, beachte man außer:

$$\eta_{p-m} = \eta_{-m} = \eta_{+m}$$

namentlich die folgende Identität:

$$\eta_m \cdot \eta_l = \eta_{m-l} + \eta_{m+l}, \tag{2}$$

wo $m \geqq l$ gedacht ist, und wo, wenn $m + l > \frac{p-1}{2}$ ist,

$$\eta_{p-m-l} \text{ für } \eta_{m+l}$$

gesetzt werden darf. Die Identität (2) folgt aus der Multiplikation von:

$$\varepsilon^m + \varepsilon^{-m} \text{ mit } \varepsilon^l + \varepsilon^{-l}.$$

Um nun die Lösung der Kreisteilungsgleichung $x^p = 1$ zu bewerkstelligen, braucht man außer der Identität (2) nur noch den Satz [1]), daß, wenn eine

---

[1]) Dieser Satz (vgl. meine „Niedere Analysis", Teil II, § 21) folgt bekanntlich allein aus den elementaren Formeln für $\frac{a^v - b^v}{a-b}$ und setzt die Kenntnis des Gaußschen Fundamentalsatzes der Algebra nicht voraus.

ganze Funktion $f(x)$ dadurch Null wird, daß man $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_p$ einsetzt, sie mit:

$$A(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_p)$$

identifiziert werden kann. Wenn man bei diesem Produkte $A = 1$ setzt und die p Klammern als gelöst auffaßt, erkennt man, daß, weil in

$$x^p - 1$$

der Koeffizient von x^{p-1} Null ist, die Summe der n Wurzeln

$$1 + \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots \varepsilon^{p-1}$$

Null sein muß, oder:

$$(3) \qquad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots + \eta_{\frac{p-1}{2}} = -1\,.$$

Es handelt sich nun darum, durch (2) und (3) hinreichend viele Gleichungen zu erschließen, um die $\frac{p-1}{2}$ reellen Zahlen η oder auch nur eine von ihnen algebraisch zu bestimmen. Wenn zunächst $p = 5$ ist, erhält man aus (2):

$$\eta_1 \cdot \eta_2 = \eta_1 + \eta_3 = \eta_1 + \eta_2\,,$$

woraus folgt:

$$\left\{ \begin{array}{r} \eta_1 + \eta_2 = -1 \\ \eta_1 \cdot \eta_2 = -1 \end{array} \right\},$$

woraus η_1 und η_2 und dadurch auch die Wurzeln der Gleichung $x^5 = 1$ folgen (Goldner Schnitt). Wenn zweitens $p = 7$ ist, so erhält man:

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = -1$$

und ferner durch die Identität (2):

$$\eta_1 \eta_2 + \eta_1 \eta_3 + \eta_2 \eta_3 = \eta_1 + \eta_3 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_1 + \eta_2$$
$$= 2(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) = -2,$$

sowie:

$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 = (\eta_1 + \eta_3)\eta_3 = (-1 - \eta_2)\eta_3$$
$$= -\eta_3 - \eta_1 - \eta_2 = +1.$$

Hieraus erkennt man, daß die Lösung der Gleichung $x^7 = 1$ von der Lösung einer Gleichung dritten Grades abhängt, und zwar von der Gleichung:

$$0 = x^3 - (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)x^2$$
$$+ (\eta_1 \eta_2 + \eta_1 \eta_3 + \eta_2 \eta_3)x - \eta_1 \eta_2 \eta_3$$

oder, nach den soeben erhaltenen Resultaten:

$$0 = x^3 + x^2 - 2x - 1.$$

Sowie soeben für $p = 7$ eine Gleichung dritten Grades gebildet werden konnte, deren drei Wurzeln η_1, η_2, η_3 sind, wo:

$$\eta_1 = \varepsilon^1 + \varepsilon^{-1}, \quad \eta_2 = \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}, \quad \eta_3 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3}$$

ist, so kann man durch das in (2) steckende Verfahren auch für die beliebige Primzahl p eine Gleichung vom Grade $\frac{1}{2}(p-1)$ bilden, aus deren Wurzeln dann die $p - 1$ komplexen Wurzeln der Gleichung $\varepsilon^p = 1$ durch quadratische Gleichungen folgen[1]).

---

[1]) Hierüber vgl. man Abschnitt III.

§ 3. Lösung der Gleichung $x^{17} = 1$ durch quadratische Gleichungen.

Wenn die Primzahl p gleich 17 oder überhaupt um 1 größer ist als eine Potenz von Zwei, so braucht man keine Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade, um die $\frac{1}{2}(p-1)$ Zahlen η zu bestimmen. Wenn $p = 17$ ist, so handelt es sich darum, die acht Zahlen:

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \eta_4, \quad \eta_5, \quad \eta_6, \quad \eta_7, \quad \eta_8$$

zu finden, wo

$$\eta_i = \varepsilon^i + \varepsilon^{-i}$$

ist, und wo ε^i, für i gleich 1 bis 16, die 16 komplexen Wurzeln der Gleichung $x^{17} = 1$ bedeutet.

Zunächst ist nach (3):

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5 + \eta_6 + \eta_7 + \eta_8 = -1\,. \tag{4}$$

Ferner folgt durch (2) das Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{l} \eta_1\,\eta_4 = \eta_3 + \eta_5 \\ \eta_3\,\eta_5 = \eta_2 + \eta_8 \\ \eta_2\,\eta_8 = \eta_6 + \eta_7 \\ \eta_6\,\eta_7 = \eta_1 + \eta_4 \end{array}\right\}. \tag{5}$$

Von den hier rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Summen multiplizieren wir nun je zwei miteinander, wobei wir wieder das aus der Identität (2) hervorgehende Verfahren benutzen. So erhalten wir:

$$(6)\begin{cases}(\eta_3+\eta_5)(\eta_2+\eta_8)=\eta_1+2\eta_3+\eta_4+2\eta_5+\eta_6\\ \qquad\qquad\qquad\qquad +\eta_7\,;\\ (\eta_3+\eta_5)(\eta_6+\eta_7)=\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4+\eta_5+\eta_6\\ \qquad\qquad\qquad\qquad +\eta_7+\eta_8=-1\,;\\ (\eta_3+\eta_5)(\eta_1+\eta_4)=2\eta_1+\eta_2+2\eta_4+\eta_6+\eta_7\\ \qquad\qquad\qquad\qquad +\eta_8\,;\\ (\eta_2+\eta_8)(\eta_6+\eta_7)=\eta_1+2\eta_2+\eta_3+\eta_4+\eta_5\\ \qquad\qquad\qquad\qquad +2\eta_8\,;\\ (\eta_2+\eta_8)(\eta_1+\eta_4)=\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4+\eta_5+\eta_6\\ \qquad\qquad\qquad\qquad +\eta_7+\eta_8=-1\,;\\ (\eta_6+\eta_7)(\eta_1+\eta_4)=\eta_2+\eta_3+\eta_5+2\eta_6+2\eta_7\\ \qquad\qquad\qquad\qquad +\eta_8\,.\end{cases}$$

Zwei von den sechs Gleichungen dieses Gleichungssystems ergaben die Summe aller acht Zahlen η und die Summe der vier übrigen ergibt jede dieser Zahlen viermal, also -4. Nun ist aber die Summe der linken Seiten dieser vier übrigen Gleichungen gleich:

$$[(\eta_1+\eta_4)+(\eta_2+\eta_8)]\,[(\eta_3+\eta_5)+(\eta_6+\eta_7)]\,.$$

Hiernach wird aus dem Gleichungssystem (6) das folgende:

$$(7)\begin{cases}[(\eta_1+\eta_4)+(\eta_2+\eta_8)]\,[(\eta_3+\eta_5)+(\eta_6+\eta_7)]=-4\\ (\eta_1+\eta_4)(\eta_2+\eta_8)=-1\\ (\eta_3+\eta_5)(\eta_6+\eta_7)=-1\,.\end{cases}$$

Die in (7) zusammengefaßten drei Gleichungen und die Gleichung (4) zeigen nun, daß man Summe und Produkt kennt, erstens von:

$$(\eta_1 + \eta_4) + (\eta_2 + \eta_8) \quad \text{und} \quad (\eta_3 + \eta_5) + (\eta_6 + \eta_7),$$

hierdurch zweitens von:

$$\eta_1 + \eta_4 \quad \text{und} \quad \eta_2 + \eta_8,$$

und drittens von:

$$\eta_3 + \eta_5 \quad \text{und} \quad \eta_6 + \eta_7.$$

Durch (5) kennt man dann aber auch die Produkte:

$$\eta_1 \eta_4, \quad \eta_2 \eta_8, \quad \eta_3 \eta_5, \quad \eta_6 \eta_7,$$

so daß die acht Größen η einzeln bestimmbar sind, und zwar lediglich durch Gleichungen zweiten Grades, weil die Bestimmung zweier Unbekannten aus ihrer Summe und ihrem Produkte durch eine Gleichung zweiten Grades bewerkstelligt werden kann.

Wir verzichten aber darauf, die acht Zahlen η und die sechzehn Zahlen ε, d. h. die 16 komplexen Wurzeln der Gleichung $x^{17} = 1$ wirklich durch Quadratwurzeln auszudrücken, sondern benutzen den soeben erörterten Lösungsweg nur, um eine möglichst einfache Siebzehnteilung der Kreisperipherie abzuleiten.

§ 4. Geometrische Deutung des Lösungsweges.

Die Siebzehnteilung der Kreisperipherie kann als geschehen betrachtet werden, wenn es gelingt, auch nur eine der Strecken:

$$OF_1, OF_2, OF_3, \ldots, OF_8$$

mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Das Lot in

F_m auf OA schneidet dann die Peripherie in A_m, und man erhält dann alle übrigen Punkte A_m, wenn man AA_m wiederholt als Sehne einträgt. Um die Strecken OF_m einführen zu können, benutzen wir

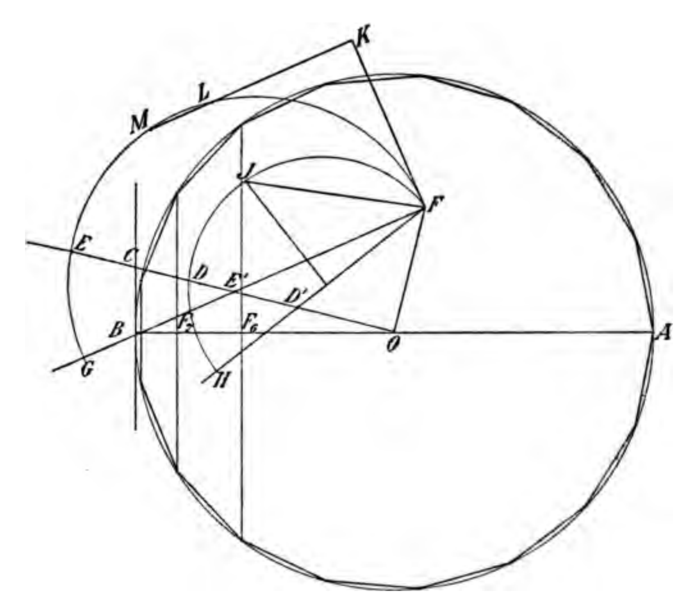


Fig. 2.

die Gleichung (1) in § 2, beachten aber dabei das Vorzeichen, so daß, wenn F_m zwischen O und A liegt, $OF_m = + x_m$, und, wenn F_m zwischen O und B liegt, $OF_m = - x_m$ zu setzen ist. Demgemäß haben wir zu setzen (vgl. Figur 1):

$$\eta_1 = \frac{2x_1}{r}, \quad \eta_2 = \frac{2x_2}{r}, \quad \eta_3 = \frac{2x_3}{r}, \quad \eta_4 = \frac{2x_4}{r},$$

$$\eta_5 = -\frac{2x_5}{r}, \quad \eta_6 = -\frac{2x_6}{r}, \quad \eta_7 = -\frac{2x_7}{r}, \quad \eta_8 = -\frac{2x_8}{r}.$$

Aus (4) folgt dann:

$$(8) \quad [(x_6+x_7)-(x_3-x_5)]-[(x_1+x_4)-(x_8-x_2)] = \tfrac{1}{2}r.$$

Hierbei ließ sich die Anordnung der Glieder so einrichten, daß jede Klammer eine positive Strecke einschließt.

Aus (8) und (7) folgt dann:

$$(9) \quad (x_6+x_7)-(x_3-x_5) = \sqrt{\left(\frac{r}{4}\right)^2 + r^2} + \frac{r}{4} = 2a,$$

$$(10) \quad (x_1+x_4)-(x_8-x_2) = \sqrt{\left(\frac{r}{4}\right)^2 + r^2} - \frac{r}{4} = 2b.$$

Um die Strecken $2a$ und $2b$ zu konstruieren, hat man nur im Punkte B auf OB das Lot zu errichten, auf dieses von B aus den vierten Teil des Radius bis C abzutragen und C mit O zu verbinden. Ein Kreis um C mit CB als Radius schneidet OC in D und die Verlängerung von OC über C hinaus in E. Dann ist $OE = 2a$, $OD = 2b$.

Um nun zu x_6 und x_7 gelangen zu können, entnehmen wir dem System (7):

$$(11) \qquad (x_1+x_4)(x_8-x_2) = \left(\frac{r}{2}\right)^2,$$

$$(12) \qquad (x_8 - x_5)(x_6 + x_7) = \left(\frac{r}{2}\right)^2.$$

Aus (9) und (12) folgt dann:

$$(13) \qquad x_6 + x_7 = a + \sqrt{a^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = c\,.$$

Ebenso folgt aus (10) und (11):

$$(14) \qquad x_1 + x_4 = b + \sqrt{b^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = d\,.$$

Um $c = x_6 + x_7$ zu konstruieren, errichte man in O auf OE das Lot, das man gleich $\frac{r}{2}$ mache, verbinde den Abtragungsendpunkt F mit dem Halbierungspunkte E' von OE und verlängere FE' um OE' bis G. Ebenso verbinde man, um d zu konstruieren, F mit D', dem Halbierungspunkte von OD, und verlängere FD' um OD' bis H. Dann ist $FG = c$, $FH = d$. Um endlich aus c und d x_6 und x_7 zu konstruieren, haben wir noch aus $\eta_6\,\eta_7 = \eta_1 + \eta_4$ die Gleichung:

$$x_6 \cdot x_7 = \frac{r}{2}(x_1 + x_4) = \frac{r}{2} \cdot d$$

zu entnehmen, und mit (13) zu verbinden. Um dann x_6 und x_7 zu finden, hat man die mittlere Proportionale zu $\frac{r}{2}$ und d als Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks zu nehmen, dessen Hypotenuse FG ist. Die

Projektionen, die durch den Fußpunkt der Höhe auf der Hypotenuse gebildet werden, sind dann x_6 und x_7.

§ 35. Die Konstruktion selbst.

Man errichte in B, dem Endpunkt des Durchmessers AOB, auf AB das Lot, trage auf dieses den vierten Teil des Radius r ab, bis C. Der Kreis um C mit CB schneidet CO selbst in D und die Verlängerung in E. D' sei der Halbierungspunkt von OD und E' der Halbierungspunkt von OE, so daß $OE' = a$, $OD' = b$ ist. Dann errichte man in O auf OE das Lot, trage darauf $\frac{r}{2}$ ab bis F, ziehe FE' und verlängere FE' über E' hinaus um $E'O$ bis G, ziehe dann FD' und verlängere FD' über D' hinaus um $F'O$ bis H, so daß $FG = c$, $FH = d$ ist. Dann konstruiere man die mittlere Proportionale FJ zwischen d und $\frac{r}{2}$. Der Halbkreis über FG wird dann von der Parallelen KLM zu FG im Abstande FJ in zwei Punkten L und M geschnitten, so daß $KL = x_6$ und $KM = x_7$ ist. Endlich trage man von O aus auf OB $KL = x_6$ ab bis F_6 und $KM \doteq x_7$ bis F_7. Die Lote in F_6 und in F_7 auf OB schneiden den gegebenen Kreis in A_6 und A_7. Durch wiederholte Eintragung der Sehne $A_6 A_7$ in den Kreis erhält man die Siebzehnteilung der Peripherie.

III. Abschnitt.

Die Kreisteilungsgleichungen.

§ 1. Allgemeineres.

Im Anschluß an § 2 in Abschnitt II behandeln wir hier allgemeiner die Gleichung $x^n = 1$. Wir wissen, daß in der Gaußschen Darstellung der komplexen Zahlen durch Punkte einer Ebene die Punkte, welche die Wurzeln dieser Gleichung darstellen, die Peripherie des Kreises um den Punkt Null mit dem Radius Eins in n gleiche Teile so teilen, daß der Punkt Eins einer der n Punkte ist. Deshalb nennt man die Gleichungen von der Form:

$$Ax^n = B,$$

deren Wurzeln $\sqrt[n]{\frac{B}{A}}$ mal so groß sind, als die Wurzeln der Gleichung $x^n = 1$ Kreisteilungsgleichungen. Es reicht aus, wenn man, bezüglich der Lösung solcher Kreisteilungsgleichungen bei dem Fall $A = 1$, $B = 1$, also bei $x^n = 1$ stehen bleibt. Ist zunächst $n = 2^m \cdot p$, wo p ungerade ist, so hängen die Wurzeln der Gleichung $x^n = 1$ von den Wurzeln der

Gleichung $x^p = 1$ ab und zwar durch lediglich quadratische Gleichungen, oder, geometrisch ausgedrückt, hat man den Kreis in p gleiche Teile geteilt, wo p ungerade ist, so kann man ihn auch, weil man einen Winkel halbieren kann, in $2^m \cdot p$ gleiche Teile teilen. Ist nun p eine ungerade Zahl, welche die Primfaktoren $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$ enthält, so lassen sich die $p - 1$ komplexen Wurzeln von $x^p = 1$ durch die $q_1 - 1, q_2 - 1, \ldots, q_k - 1$ komplexen Wurzeln von:

$$x^{q_1} = 1, \quad x^{q_2} = 1, \quad x^{q_3} = 1, \ldots, x^{q_k} = 1$$

ausdrücken, falls jeder der Primfaktoren

$$q_1, \; q_2, \; q_3, \ldots, q_k$$

in p nur einmal steckt, wie folgendes Beispiel zeigt. Die Gleichung $x^3 = 1$ habe die drei Wurzeln:

$$1, \; \varepsilon, \; \varepsilon^2$$

und die Gleichung $x^5 = 1$ die fünf Wurzeln:

$$1, \; \eta, \; \eta^2, \; \eta^3, \; \eta^4.$$

Dann müssen:

$$1, \; \varepsilon, \; \varepsilon^2, \; \eta, \; \eta^2, \; \eta^3, \; \eta^4, \; \varepsilon\eta, \; \varepsilon\eta^2, \; \varepsilon\eta^3, \; \varepsilon\eta^4, \; \varepsilon^2\eta, \; \varepsilon^2\eta^2, \; \varepsilon^2\eta^3, \; \varepsilon^2\eta^4$$

die 15 Wurzeln von $x^{15} = 1$ sein, weil jede dieser 15 Zahlen die Eigenschaft hat, mit 15 potenziert, die Zahl 1 zu ergeben. Genau so erkennt man, daß man die p Wurzeln von $x^p = 1$, falls

$$p = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots q_k$$

ist, und q_1, q_2, q_3, ... ungerade Primzahlen sind, erhält, wenn man von den h folgenden Zeilen:

$$\begin{array}{l} 1,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_1^2,\ \varepsilon_1^3, \ldots,\ \varepsilon_1^{q_1-1}, \\ 1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_2^2,\ \varepsilon_2^3, \ldots,\ \varepsilon_2^{q_2-1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1,\ \varepsilon_q,\ \varepsilon_q^2,\ \varepsilon_q^3, \ldots,\ \varepsilon_q^{q_h-1} \end{array}$$

jede Zahl in jeder Reihe mit jeder Zahl jeder anderen Reihe multipliziert. Wenn wir daher hier von dem etwas schwereren Fall, wo einer der in p steckenden Primfaktoren mehr als einmal vorhanden ist, ganz absehen, so bleibt uns nur übrig, die Kreisteilungsgleichung $x^p = 1$, wo p Primzahl ist, zu behandeln. Da man beispielsweise durch die elementare Arithmetik die drei Wurzeln von $x^3 = 1$ und die fünf Wurzeln von $x^5 = 1$, sowie durch Abschnitt II die 17 Wurzeln von $x^{17} = 1$ berechnen kann, so kann man durch eine Zusammensetzung, wie die obige, auch die

3 mal 5 mal 17

Wurzeln der Gleichung $x^{3 \cdot 5 \cdot 17} = 1$ berechnen. Geometrisch heißt dies, daß man mit Zirkel und Lineal den Kreis in $3 \cdot 5 \cdot 17 = 255$ Teile teilen kann, weil man ihn mit denselben Mitteln in 3, in 5 und in 17 gleiche Teile teilen kann.

§ 2. Die Summen der Potenzen der Zahlen η.

Wenn man, wie in § 2 des Abschnitts II, die

$p-1$ komplexen Wurzeln der Gleichung $x^p = 1$, wo p Primzahl ist, mit:

$$\varepsilon^1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3, \ldots,\ \varepsilon^{p-1}$$

bezeichnet, und dann

$$\varepsilon^i + \varepsilon^{-i} \quad \text{mit} \quad \eta_i$$

bezeichnet, so entstehen $\frac{1}{2}(p-1)$ Zahlen η, aus denen sich die $p-1$ Zahlen $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{p-1}$ durch quadratische Gleichungen bestimmen lassen. Die Gleichung vom Grade $\frac{1}{2}(p-1)$, deren Wurzeln die Zahlen η sind, hat Koeffizienten, die sich dadurch bestimmen lassen, daß man beachtet, daß die Summe aller $\frac{1}{2}(p-1)$ Zahlen η gleich der Summe aller $p-1$ Zahlen ε, also (§ 2 in Abschnitt II) gleich -1 ist, und, daß, wie in Abschnitt II, $\eta_0 = 2$ und

$$(1) \qquad \eta_l \cdot \eta_m = \eta_{l-m} + \eta_{l+m}$$

ist, wo immer für jedes η, dessen Koeffizient w größer als $\frac{1}{2}(p-1)$ ist, dasjenige η zu setzen ist, dessen Koeffizient $p-w$ ist. Um die Koeffizienten der Gleichung vom Grade $\frac{1}{2}(p-1)$, deren Wurzeln die Zahlen η sind, bequem bestimmen zu können, drücken wir zunächst die Summen der n-ten Potenzen aller Zahlen η aus, von $n=1$ bis $n=q$. Dabei setzen wir, der Kürze wegen,

$$q = \tfrac{1}{2}(p-1),$$

und erhalten aus:

$$\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_q = -1$$

zunächst nach (1):

$$\begin{aligned} &\eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_q^2 \\ &= q \cdot \eta_0 + (\eta_2 + \eta_4 + \ldots) + (\eta_{p-1} + \eta_{p-3} + \ldots) \\ &= q \cdot \eta_0 + (\eta_2 + \eta_4 + \ldots) + (\eta_1 + \eta_3 + \ldots) \\ &= q \cdot \eta_0 + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \ldots + \eta_q) \\ &= q \cdot \eta_0 - 1 = 2q - 1 \,. \end{aligned}$$

Indem wir die Summe der n-ten Potenzen aller q Zahlen η mit p_n bezeichnen, haben wir daher bis jetzt die beiden Resultate:

$$\begin{aligned} p_1 &= -1 \,, \\ p_2 &= 2q - 1 \,. \end{aligned}$$

Für η_1^3 kommt $\eta_1(\eta_0 + \eta_2) = 2\eta_1 + \eta_1 + \eta_3 = 3\eta_1 + \eta_3$, dann $\eta_2^3 = 3\eta_2 + \eta_6$ usw., so daß wir erhalten:

$$\begin{aligned} p_3 &= 3(\eta_1 + \eta_2 + \ldots \eta_q) + (\eta_1 + \eta_2 + \ldots \eta_q) \\ &= 4(\eta_1 + \eta_2 + \ldots \eta_q) = 4p_1 = -4 \,. \end{aligned}$$

Um p_4 zu finden, beginnen wir mit

$$\eta_1^4 = \eta_1(3\eta_1 + \eta_3) = 3\eta_0 + 4\eta_2 + \eta_4 = 6 + 4\eta_2 + \eta_4 \,.$$

Da für p_4 ein die η symmetrisch enthaltender Ausdruck kommen muß, so können wir, falls q groß genug ist, ohne mühsame Berechnung erkennen:

$$\begin{aligned} p_4 &= 6q + 4(\eta_1 + \ldots \eta_q) + (\eta_1 + \ldots \eta_q) \\ &= 6q + 5p_1 = 6q - 5 \,. \end{aligned}$$

Aus $\eta_1^5 = 10\eta_1 + 5\eta_3 + \eta_5$, $\eta_1^6 = 10\eta_0 + 15\eta_2 + 6\eta_4 + \eta_6$, $\eta_1^7 = 35\eta_1 + 21\eta_3 + 7\eta_5 + \eta_7$ usw. erkennen wir dann weiter, daß, falls q groß genug ist:

$$p_5 = 10 p_1 + 5 p_1 + p_1 ,$$
$$p_6 = 20 q + 15 p_1 + 6 p_1 + p_1 ,$$
$$p_7 = 35 p_1 + 21 p_1 + 7 p_1 + p_1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Die bei den rechts stehenden Summen auftretenden Koeffizienten müssen Binomialkoeffizienten werden, da sie sich in derselben Weise bilden, wie beim Stiefelschen Dreieck die auf höhere Potenzen bezüglichen Koeffizienten sich aus denen zusammensetzen, die sich auf niedere Potenzen beziehen. Benutzen wir nun noch, daß:

$$(2m+1)_0 + (2m+1)_1 + \ldots + (2m+1)_m = 2^{2m}$$

ist, und daß:

$$(2m)_0 + (2m)_1 + \ldots + (2m)_{m-1} = 2^{2m-1} - (2m-1)_{m-1}$$

ist, so erhalten wir schließlich:

Erstens für ungerade Indices $n = 2m + 1$:

$$p_{2m+1} = - 2^{2m}, \tag{2}$$

zweitens für gerade Indices $n = 2m$:

$$p_{2m} = (2m)_m \cdot q - 2^{2m-1} + (2m-1)_{m-1} . \tag{3}$$

Die Resultate (2) und (3) sind als richtig erkannt, falls $q = \frac{1}{2}(p-1)$ groß genug ist. Es fragt sich nun noch, bis zu welchem Exponenten n die Resultate (2) und (3) bei gegebenem q richtig sind. Offenbar so weit als in den für die Potenzen von η_i rechts erhaltenen Summen der Vielfachen der η jeder Index

von η nur einmal auftritt, weil so lange die auftretenden Koeffizienten das Stiefelsche Gesetz der Bildung der Binomialkoeffizienten befolgen. Dies ist aber bei geradem n bis $n = 2q$ und bei ungeradem n bis $n = 2q - 1$ der Fall, so daß wir sagen können, daß die Formeln (2) und (3) für $n < p$ richtig sind, also auch, wenn n höchstens q ist.

Die, wie es scheint, bisher nicht bemerkten Resultate (2) und (3) lassen sich auch in trigonometrischer und in rein geometrischer Form aussprechen.

Ist nämlich $\alpha = \frac{360^0}{p}$, so ist:

$$\eta_1 = (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos\alpha - i\sin\alpha) = 2\cos\alpha$$

$$\eta_2 = 2\cdot\cos 2\alpha\,,\ \eta_3 = 2\cdot\cos 3\alpha\,, \ldots \eta_q = 2\cdot\cos q\alpha\,.$$

Demnach ist wegen Formel (2) für ungerade n:

$$(4)\quad \cos^n\alpha + \cos^n 2\alpha + \cos^n 3\alpha + \ldots + \cos^n q\alpha = -\tfrac{1}{2},$$

wo $\alpha = \frac{360^0}{p}$, $q = \frac{1}{2}(p-1)$ und $n < p$ ist.

Für gerade n erhalten wir ebenso aus (3):

$$(5)\quad \cos^n\alpha + \cos^n 2\alpha + \ldots + \cos^n q\alpha = -\tfrac{1}{2} + \frac{q\cdot n_{\frac{n}{2}} + (n-1)_{\frac{n}{2}-1}}{2^n},$$

wo $\alpha = \frac{360^0}{p}$, $q = \frac{1}{2}(p-1)$, $n < p$ ist, und wo

$$n_{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}, \quad (n-1)_{\frac{n}{2}-1} = \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!\left(\frac{n}{2}+1\right)!}$$

ist.

In geometrischer Form läßt sich (4) folgendermaßen aussprechen:

Einem Kreise vom Radius r sei ein reguläres p-Eck einbeschrieben, wo p eine ungerade Primzahl ist. Auf einen Durchmesser AB, der von einer Ecke A ausgeht, seien von den übrigen Ecken die Lote gefällt. Die Fußpunkte derselben haben vom Kreiszentrum O $q = \frac{1}{2}(p-1)$ Entfernungen. Dann ist für jedes ungerade $n < p$ die Summe der n-ten Potenzen der von O aus nach B hin gelegenen Entfernungen um die Hälfte der n-ten Potenz des Radius größer als die Summe der n-ten Potenzen der von O aus nach A hin gelegenen Entfernungen.

Formel (5) lautet in geometrischer Form, daß, wenn n gerade ist, die Summe der n-ten Potenzen aller q Entfernungen soviel mal so groß als die n-te Potenz des Radius ist, wie der Ausdruck:

$$-\frac{1}{2} + \frac{q \cdot n_{\frac{n}{2}} + (n-1)_{\frac{n}{2}-1}}{2^n}$$

angibt, wo $n_{\frac{n}{2}}$ den Binomialkoeffizienten

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

bedeutet, und wo $(n-1)_{\frac{n}{2}-1}$ den Binomialkoeffizienten:

$$\frac{(n-1)!}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!\left(\frac{n}{2}+1\right)!}$$

bedeutet.

§ 3. Bildung der Resolvente vom Grade $\frac{1}{2}(p-1)$.

Um aus den in § 2 gefundenen Potenzsummen der q Zahlen η die Gleichung herzustellen, deren q Wurzeln diese Zahlen η sind, d. h. um ihre Koeffizienten

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_q$$

zu finden, wo a_i den Koeffizienten von η^{q-i} bedeutet, tut man am besten, jedes a_i durch die vorangehenden Koeffizienten und die Potenzsummen, die wieder p_i heißen mögen, darzustellen, wobei man zu beachten hat, daß, abgesehen vom Vorzeichen, a_i die Summe aller denkbaren Produkte von je i unter den q Wurzeln $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_q$ bedeutet. Man erhält nämlich:

$$-1 \cdot a_1 = p_1; \quad +2 \cdot a_2 = p_1 \cdot a_1 - p_2;$$

$$-3 \cdot a_3 = p_1 \cdot a_2 - p_2 \cdot a_1 + p_3;$$

$$+4\, a_4 = p_1 \cdot a_3 - p_2 \cdot a_2 + p_3 \cdot a_1 - p_4;$$

$-5 \cdot a_5 = p_1 \cdot a_4 - p_2 \cdot a_3 + p_3 \cdot a_2 - p_4 \cdot a_1 + p_5$; usw.
Nach Einsetzung der in § 2 für die p_i gefundenen Resultate erhält man auf einfache Weise die gesuchten Koeffizienten der Gleichung, deren Wurzeln die q Zahlen η sind, durch Binomialkoeffizienten ausgedrückt, nämlich:

$$-a_1 = -1\,; \quad +a_2 = -(q-1)_1\,; \quad -a_3 = +(q-2)_1\,;$$
$$+a_4 = +(q-2)_2\,; \quad -a_5 = -(q-3)_2\,;$$
$$+a_6 = -(q-3)_3\,; \quad -a_7 = +(q-4)_3\,;$$
$$+a_8 = +(q-4)_4\,; \quad -a_9 = -(q-5)_4\,;$$
$$+a_{10} = -(q-5)_5\,; \quad \text{usw.}$$

Die Gleichung selbst lautet also:

$$(1)\quad \eta^q + \eta^{q-1} - (q-1)_1 \cdot \eta^{q-2} - (q-2)_1 \cdot \eta^{q-3} + (q-2)_2 \cdot \eta^{q-4} + (q-3)_2 \cdot \eta^{q-5} - (q-3)_3 \cdot \eta^{q-6} - (q-4)_3 \cdot \eta^{q-7} + (q-4)_4 \cdot \eta^{q-8} + (q-5)_4 \cdot \eta^{q-9} - (q-5)_5 \cdot \eta^{q-10} - (q-6)_5 \cdot \eta^{q-11} + \ldots = 0\,.$$

Diese Gleichung gilt für jede Zahl $q = \frac{1}{2}(p-1)$, gleichviel ob q gerade ist oder eine ungerade Primzahl oder eine ungerade zusammengesetzte Zahl ist. Für den im Abschnitt II behandelten Fall, wo $p = 17$ ist, erhält man beispielsweise:

$$\eta^8 + \eta^7 - 7\eta^6 - 6\eta^5 + 15\eta^4 + 10\eta^3 - 10\eta^2 - 4\eta + 1 = 0\,.$$

Aus Abschnitt II geht hervor, daß diese Gleichung achten Grades lediglich durch quadratische Gleichungen lösbar ist. Ein zweites Beispiel bietet $p = 7$, also

$q = 3$. Man findet dann die schon im zweiten Abschnitt vorgekommene Gleichung, auf deren Lösung die Siebenteilung des Kreises beruht, nämlich:

$$\eta^3 + \eta^2 - 2\eta - 1 = 0 .$$

Für $p = 19$, also $q = 9$ erhält man aus (1):

$$\eta^9 + \eta^8 - 8\eta^7 - 7\eta^6$$
$$+ 21\eta^5 + 15\eta^4 - 20\eta^3 - 10\eta^2 + 5\eta + 1 = 0 .$$

Wenn die Zahl $q = \frac{1}{2}(p - 1)$, ebenso wie p, eine Primzahl ist, so läßt sich die nach dem Obigen erhaltene Gleichung q-ten Grades nicht durch Gleichung von niederem als dem q-ten Grade lösen. Die p-Teilung des Kreises hängt also dann von der oben mit (1) bezeichneten Gleichung ab. Beispiele hierfür bieten außer dem schon oben angegebenen Fall $p = 7$ noch folgende Primzahlen p:

$$11, \quad 23, \quad 47, \quad 59, \quad 83 \quad \text{usw.}$$

Wenn aber zwar p eine Primzahl, q aber eine zusammengesetzte Zahl ist, so läßt sich die Gleichung (1), die Resolvente für $x^p = 1$, auf Gleichungen von niedrigerem Grade reduzieren, und zwar stimmt der Grad dieser Gleichungen mit den in q steckenden Primfaktoren überein. Am einfachsten gestaltet sich dann die Reduktion der Gleichung (1) auf Gleichungen niederen Grades, wenn

$$q = 2^m \cdot v$$

ist, wo v eine Primzahl ist. Dann reicht der hier eingeschlagene, auf der Identität:

$$\eta_l \cdot \eta_m = \eta_{l+m} + \eta_{l-m}$$

beruhende Weg aus, um die Gleichung v-ten Grades bilden zu können, von deren Lösung die Lösung der Gleichung q-ten Grades in η abhängt. Der Fall $m = 1$ und $m = 2$ soll deshalb in den beiden nächsten Paragraphen durch einige Beispiele beleuchtet werden, d. h. der Fall, wo die Primzahl $p = 4v + 1$, und der Fall, wo $p = 8w + 1$ ist, wo v und w auch Primzahlen sind.

§ 4. Die Primzahl p ist gleich $4 \cdot v + 1$, wo v Primzahl ist.

Wenn $p = 4v + 1$ und v Primzahl sein soll, so ist die kleinste Zahl p, die diese Bedingung erfüllt, $p = 13$. Dann folgen $p = 29$, $p = 53$ usw. Wir behandeln zunächst die Gleichung $x^{13} = 1$. Ihre zwölf komplexen Wurzeln seien:

$$\varepsilon^1, \ \varepsilon^2, \ \varepsilon^3, \ \ldots \ \varepsilon^{12},$$

und

$$\varepsilon^i + \varepsilon^{-i}$$

sei wieder gleich η_i gesetzt, so daß:

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5 + \eta_6 = -1$$

ist. Wir wenden nun unsere Grundformel:

$$\eta_l \eta_m = \eta_{l-m} + \eta_{l+m}$$

an und wählen, ähnlich wie im Abschnitt II, die Indices so, daß rechts die Summe aller sechs Zahlen

η entsteht. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn wir folgendermaßen zusammenfassen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \eta_1 \cdot \eta_5 = \eta_4 + \eta_6 \\ \eta_4 \cdot \eta_6 = \eta_2 + \eta_3 \\ \eta_2 \cdot \eta_3 = \eta_1 + \eta_5 \end{cases} .$$

Aus (1) geht hervor, daß, wenn wir die drei Zahlen $\eta_4 + \eta_6$, $\eta_2 + \eta_3$, $\eta_1 + \eta_5$ als bekannt voraussetzen, auch die Produkte $\eta_4 \cdot \eta_6$, $\eta_2 \cdot \eta_3$, $\eta_1 \cdot \eta_5$ als bekannt vorausgesetzt werden dürfen, so daß dann die gesuchten sechs Wurzeln einzeln gefunden werden können, und zwar durch quadratische Gleichungen, weil man dreimal von je zweien der sechs Zahlen η Summe und Produkt kennt. Wir haben also nur noch die Gleichung dritten Grades zu bilden, deren Wurzeln $\eta_4 + \eta_6$, $\eta_2 + \eta_3$, $\eta_1 + \eta_5$ sind. Sie heiße:

$$x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3 = 0 .$$

Dann ist $-b_1$ gleich der Summe der drei Wurzeln, also gleich -1. Um $+b_2$ zu berechnen, setzen wir an:

$$\begin{aligned}
(\eta_4 + \eta_6)(\eta_2 + \eta_3) &= \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4 + \eta_5 + 2\eta_6 \\
(\eta_4 + \eta_6)(\eta_1 + \eta_5) &= 2\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + 2\eta_5 + \eta_6 \\
(\eta_2 + \eta_3)(\eta_1 + \eta_5) &= \eta_1 + 2\eta_2 + 2\eta_3 + \eta_4 + \eta_5 + \eta_6 .
\end{aligned}$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen erhält man:

$$+b_2 = 4(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5 + \eta_6) = -4 .$$

Um $-b_3$ zu finden, haben wir

$$\begin{aligned}
(\eta_4 + \eta_6)(\eta_2 + \eta_3) &= \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4 + \eta_5 + 2\eta_6 \\
&= -1 + \eta_4 + \eta_6
\end{aligned}$$

noch mit $\eta_1 + \eta_5$ zu multiplizieren. Dadurch erhalten wir:

$$\begin{aligned} -b_3 &= (-1 + \eta_4 + \eta_6)(\eta_1 + \eta_5) \\ &= -\eta_1 - \eta_5 + (\eta_4 + \eta_6)(\eta_1 + \eta_5) \\ &= -\eta_1 - \eta_5 + \eta_1 + \eta_5 - 1 = -1 . \end{aligned}$$

Hiernach lautet die Gleichung dritten Grades, deren drei Wurzeln $\eta_4 + \eta_6 = \eta_1 \cdot \eta_5$, $\eta_2 + \eta_3 = \eta_4 \cdot \eta_6$, $\eta_1 + \eta_5 = \eta_2 \cdot \eta_3$ sind, folgendermaßen:

$$x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0 .$$

Von dieser Gleichung dritten Grades hängt also die Lösung der Gleichung

$$x^{13} = 1$$

und damit auch die Dreizehn-Teilung des Kreises ab. In derselben Weise erhält man auch die Gleichung siebenten Grades, von der die Lösung der Gleichung

$$x^{29} = 1$$

abhängt. So wie oben die sechs Zahlen η zu dreimal zwei zusammenzufassen waren, müssen hier die 14 Zahlen

$$\eta_1, \ \eta_2, \ \eta_3, \ \eta_4, \ \dots \ \eta_{14}$$

zu siebenmal zwei gruppiert werden. Die Gruppierung muß dabei so geschehen, daß man sieben Gleichungen bildet, so daß links in jeder Gleichung das Produkt zweier Zahlen η erscheint, von denen in einer anderen Gleichung rechts die Summe erschien. Dieser Bedingung gehorcht der folgende Zyklus von sieben Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \eta_1 \cdot \eta_{12} = \eta_{11} + \eta_{13} \\ \eta_{11} \cdot \eta_{13} = \eta_2 + \eta_5 \\ \eta_2 \cdot \eta_5 = \eta_3 + \eta_7 \\ \eta_3 \cdot \eta_7 = \eta_4 + \eta_{10} \\ \eta_4 \cdot \eta_{10} = \eta_6 + \eta_{14} \\ \eta_6 \cdot \eta_{14} = \eta_8 + \eta_9 \\ \eta_8 \cdot \eta_9 = \eta_1 + \eta_{12} \end{array}\right\}.$$

§ 5. Die Primzahl p ist gleich $8 \cdot v + 1$, wo v Primzahl ist.

Wenn $p = 8v + 1$ und v ungerade Primzahl sein soll, so ist die kleinste Primzahl, die diese Bedingung erfüllt, $p = 41$. Dann würde $p = 89$ folgen. Wir beleuchten nur das Beispiel $p = 41$. Indem wir die im vorigen Paragraphen und vorher gebrauchte Bezeichnung festhalten, haben wir hier:

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \cdots + \eta_{20} = -1 \tag{1}$$

anzusetzen, und zunächst einen Zyklus zu bilden, wie in § 4, bei dem man, mit Benutzung der Grundformel

$$\eta_l \cdot \eta_m = \eta_{l+m} + \eta_{l-m},$$

von zwei Indices ausgehend, nach fünf Schritten wieder zu denselben Indices zurückkehrt. Dieser Bedingung entspricht der folgende Zyklus:

$$\left\{\begin{array}{l} \eta_1 \cdot \eta_9 = \eta_8 + \eta_{10} \\ \eta_8 \cdot \eta_{10} = \eta_2 + \eta_{18} \\ \eta_2 \cdot \eta_{18} = \eta_{16} + \eta_{20} \\ \eta_{16} \cdot \eta_{20} = \eta_4 + \eta_5 \\ \eta_4 \cdot \eta_5 = \eta_1 + \eta_9 \end{array}\right\}. \tag{2}$$

Da man, durch Addition der rechtsstehenden Summen nicht auf die Summe aller 20 Zahlen η, sondern nur auf die Summe von zehn Zahlen η kommt, also Formel (1) nicht anwenden kann, so haben wir einen zweiten Zyklus zu bilden, dessen rechte Seiten alle hier im ersten Zyklus nicht vorkommenden Zahlen enthält. Dieser zweite Zyklus lautet:

$$(3) \qquad \begin{cases} \eta_3 \cdot \eta_{14} = \eta_{11} + \eta_{17} \\ \eta_{11} \cdot \eta_{17} = \eta_6 + \eta_{13} \\ \eta_6 \cdot \eta_{13} = \eta_7 + \eta_{19} \\ \eta_7 \cdot \eta_{19} = \eta_{12} + \eta_{15} \\ \eta_{12} \cdot \eta_{15} = \eta_3 + \eta_{14} \end{cases}$$

Da nunmehr die Summe der rechten Seiten aller zehn Gleichungen der beiden Zyklen bekannt ist, müssen wir versuchen, auch das Produkt der Summen beider Zyklen durch $\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{20}$ auszudrücken. Dies gelingt, da

$$(\eta_8 + \eta_{10} + \eta_2 + \eta_{18} + \eta_{16} + \eta_{20} + \eta_4 + \eta_5 + \eta_1 + \eta_9)$$

mal

$$(\eta_{11} + \eta_{17} + \eta_6 + \eta_{13} + \eta_7 + \eta_{19} + \eta_{12} + \eta_{15} + \eta_3 + \eta_{14})$$

zu:

$$10(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \ldots + \eta_{20}) = -10$$

wird. Wir haben also aus

$$x + u = -1$$

und

$$x \cdot u = -10$$

z und u zu berechnen, wo z die Summe der rechten Seiten des ersten Zyklus, u die Summe der rechten Seiten des zweiten Zyklus bedeutet. Man findet:

$$z = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{41}$$
$$u = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{41}$$

oder umgekehrt. Der Symmetrie wegen ist es gleichgültig, welche Summe wir gleich z setzen, wenn dann nur die andere gleich u gesetzt wird. Wir können also ausgehen von:

$$\begin{cases} \eta_{11}+\eta_{17}+\eta_6+\eta_{13}+\eta_7+\eta_{19}+\eta_{12}+\eta_{15}+\eta_3+\eta_{14}=z \\ \eta_8+\eta_{10}+\eta_2+\eta_{18}+\eta_{16}+\eta_{20}+\eta_4+\eta_5+\eta_1+\eta_9=u. \end{cases}$$

Um nun die Koeffizienten c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 derjenigen Gleichung fünften Grades zu bestimmen, deren fünf Wurzeln:

$\eta_8+\eta_{10}$, $\eta_2+\eta_{18}$, $\eta_{16}+\eta_{20}$, $\eta_4+\eta_5$, $\eta_1+\eta_9$
sind, beachten wir zunächst, daß

$$-c_1 = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = +u = -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{41}$$

ist, und bestimmen dann die übrigen Koeffizienten aus der Summe der zweiten bis fünften Potenzen der fünf Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_3, x_5, ähnlich, wie dies in § 3 auseinandergesetzt ist. Für diese Potenzsummen erhält man nämlich Ausdrücke, die nur von u und z abhängen, also numerisch bekannt sind. Genau so kann man die Koeffizienten derjenigen Gleichung bestimmen, deren Wurzeln:

$\eta_{11}+\eta_{17}$, $\eta_6+\eta_{13}$, $\eta_7+\eta_{19}$, $\eta_{12}+\eta_{15}$, $\eta_3+\eta_{14}$
sind.

Kann man nun die Wurzeln der beiden Gleichungen, also die zehn Summen der beiden Zyklen als gefunden voraussetzen, so hat man durch (2) und (3) auch die Produkte von denselben Zahlen, deren Summen als bekannt gelten sollen, daher die 20 Zahlen η, weil man zehn mal von zweien derselben Summe und Produkt kennt.

IV. Abschnitt.

Die Zahl der von zwei Planspiegeln entworfenen Bilder.

Noch immer wird die Anzahl der Bilder eines Objekts, das sich zwischen zwei Planspiegeln befindet, in den Schulbüchern über Physik gar nicht oder unvollständig oder gar falsch angegeben, obwohl schon Kunzeck 1836, Hermann Klein 1874 (Pogg. Ann., Bd. 152) darauf aufmerksam gemacht hatte, und obwohl der Verfasser 1882 (in den Mitt. der Hamb. Math. Ges. und in Hoffmanns Zeitschr.) auf einfachste Weise eine Formel abgeleitet hatte, aus der sich die gesuchte Anzahl unzweideutig ergibt. Wenn beispielsweise die beiden Planspiegel unter einem Winkel von 72 Grad zueinander geneigt sind, und der Objektpunkt nicht gerade genau in der Winkelhalbierungsebene liegt, so gibt es nicht vier Bilder, wie der übliche Ausdruck

$$\frac{360}{\alpha} - 1$$

ergeben würde, sondern fünf Bilder, so daß man das Objekt fünfmal wiederholt, also im ganzen sechsmal

sehen kann, wovon sich jeder Leser auch empirisch überzeugen kann. Die vom Verfasser angegebene und unten abgeleitete Regel für die Anzahl der von zwei Planspiegeln entworfenen Bilder eines Lichtpunktes lautet:

Legt man durch den Lichtpunkt die Ebene, welche auf den beiden Planspiegeln senkrecht steht, so schneidet diese Ebene den Schnittstrahl der beiden Spiegelebenen in einem Punkte, der das Zentrum eines Kreises ist, auf dessen Peripherie der Lichtpunkt und dessen sämtliche Bilder liegen müssen. Die Verbindungsgerade des Lichtpunktes mit dem Zentrum teilt den Winkel α zwischen den Spiegelebenen in die beiden Teile φ und φ', so daß $\varphi + \varphi' = \alpha$ ist. Man dividiere nun das Supplement von φ durch α und merke sich, falls die Division aufgeht, die entstandene ganze Zahl, und, falls die Division nicht aufgeht, die nächst größere ganze Zahl. Ebenso verfahre man mit dem Supplement von φ'. Die Summe der gemerkten Zahlen ist stets die Anzahl der entstandenen Bilder. Wenn die Division von 180 Grad durch α eine ganze Zahl ergibt, so fallen die beiden Bilder zusammen, die in dem Scheitelwinkelraum des Spiegelwinkels liegen, und, wenn man zwei zusammenfallende Bilder nur als ein einziges Bild betrachten will, so ist in diesem besonderen Falle die erhaltene Summe um eins zu erniedrigen.

Zu diesem einfachen Resultat gelangt man durch folgende Betrachtung:

Nach dem Reflexionsgesetz müssen die Lichtstrahlen, die von einem Punkte B herkommen und einen Spiegel S treffen, von diesem so reflektiert werden, daß sie von einem Punkte B_1 herzukommen scheinen, den man erhält, wenn man von B auf die Ebene des Spiegels S das Lot fällt und dieses über den Fußpunkt hinaus um sich selbst verlängert. Wenn es nun einem Auge möglich ist, sich so zu stellen, daß die reflektierten Strahlen durch seine Pupille gelangen und seine Netzhaut treffen können, so muß dieses Auge in B_1 ein Bild des Objektpunktes B sehen. Da die Ebene des Spiegels Symmetrieebene zwischen Punkt B und B_1 ist, so müssen B und B_1 von jedem Punkte der Spiegelebene gleichweit abstehen. Wenn nun die von dieser Spiegelebene reflektierten Strahlen einen zweiten Spiegel S' treffen und von diesem reflektiert werden können, so erhalten sie Richtungen, als ob sie von einem Punkte B_2 herkämen, den man erhält, wenn man von B_1 das Lot auf die Ebene des Spiegels S' fällt und dieses über den Fußpunkt hinaus um sich selbst verlängert. Demnach müssen nun auch B_1 und B_2 von der zweiten Spiegelebene S' gleichen Abstand haben, so daß jeder Punkt auf S' von B_1 und B_2 denselben Abstand haben muß. Demnach müssen B, B_1, B_2 von jedem Punkte der Schnittlinie a der beiden Spiegelebenen gleichen Ab-

stand haben, insbesondere also auch von demjenigen Punkte O auf a, in welchem a von der Ebene getroffen wird, die man durch B senkrecht zu den beiden Spiegelebenen legen kann. Folglich ist O Zentrum eines Kreises, auf dessen Peripherie B, B_1, B_2 liegen. Unter den unzählig vielen Lichtstrahlen, welche von der zweiten Spiegelebene S' reflektiert werden, gibt es nun wieder unzählig viele Strahlen, welche imstande sind, die erste Spiegelebene S zu treffen, und deshalb von dieser so reflektiert werden, als kämen sie von einem Punkte B_3 her, den man erhält, wenn man von B_2 das Lot auf die Spiegelebene S fällt und dieses, über den Fußpunkt hinaus, um sich selbst verlängert. Hieraus folgt, daß nun auch B_3 auf der Peripherie des Kreises liegen muß, der O als Zentrum hat, und dessen Ebene durch B senkrecht zu den beiden Spiegelebenen geht. Indem nun die zuletzt von der Spiegelebene S reflektierten Strahlen teilweise wieder von der anderen Spiegelebene S' reflektiert werden, diese wieder zum Teil von S und so fort, werden immer neue Bilder erzeugt, die sämtlich auf der Peripherie des genannten Kreises liegen müssen. Wegen der Eigenschaften des Kreises kann man nun, behufs Feststellung der Lage aller entstehenden Bilder, das Lotfällen sich ersparen. Hat man durch den Objektpunkt B die zu beiden Spiegelebenen S und S' senkrechte Ebene gelegt, welche die Schnittlinie a der beiden Spiegelebenen in

O schneidet, und hat man dann um O als Zentrum durch B den Kreis gelegt, der die beiden Spiegelebenen in den Punkten A und A' schneidet, so findet man diejenigen Punkte auf der Peripherie des Kreises,

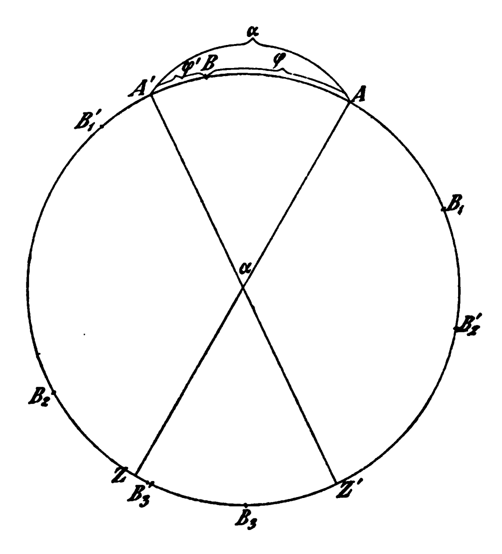


Fig. 3.

in denen Bilder des Punktes B liegen, indem man mit Hilfe eines Zirkels den Punkt B_1 auf der Peripherie feststellt, der von A soweit entfernt ist wie B. Indem man nun in derselben Weise von A' aus $A'B_1$ abträgt, erhält man B_2. Indem man dann wiederum

von A aus AB_2 abträgt, erhält man B_3 und so fort (vgl. Figur).

Natürlich kann man auch, statt von A und A' aus, von den beiden Punkten Z und Z' aus, die A und A' diametral gegenüberliegen, die Abtragungen bewerkstelligen. Es fragt sich nun, wann ein Bild letztes ist, weil die Lichtstrahlen, welche von dem einen Spiegel reflektiert, dieses Bild erzeugt haben, nicht mehr imstande sind, wenn auch nur teilweise, den anderen Spiegel zu treffen. Dies ist offenbar der Fall, wenn die Rückwärtsverlängerungen dieser Lichtstrahlen die über die Schnittlinie a hinaus verlängerte andere Spiegelebene getroffen haben, d. h. wenn die Strahlen von dem Scheitelwinkelraum der beiden Spiegel herzukommen scheinen, also soeben ein Bild erzeugt haben, das zwischen Z und Z' liegt. Man hat also mit den behufs Feststellung der Lage der Bildpunkte nötigen Abtragungen, von A und A' bzw. von Z und Z' aus, aufzuhören, sobald man ein zwischen Z und Z' liegendes Bild festgestellt hat. Wenn also B_x das erste Bild ist, das zwischen Z und Z' zu liegen kommt, so ist x die Anzahl der Bilder, wobei aber zu beachten ist, daß x nur die Anzahl derjenigen Bilder ist, welche von den Strahlen herrühren, die, von dem Lichtpunkte B ausgegangen, zuerst den Spiegel S getroffen haben. Was die Lichtstrahlen anbetrifft, die, von B gekommen, zuerst den Spiegel S' treffen, so erzeugen sie nacheinander

die Bilder B'_1, B'_2, B'_3, ..., die auf der Peripherie desselben Kreises liegen und nacheinander erhalten werden können, indem man die Abtragungen nicht von A aus, sondern von A' aus beginnt und dann, wie bei den mit B_1, B_2, B_3, ... bezeichneten Bildern, abwechselnd von A' und von A aus die Bögen abträgt. Auch bei dieser zweiten Reihe von Bildern ist ein Bild letztes, wenn es zwischen Z und Z' zu liegen kommt. Es ist nun sehr leicht, die Lage der nacheinander durch Abtragung entstehenden Bilder B_1, B_2, B_3, ... des Objekts B anzugeben, da ja diese alle auf der Peripherie des Kreises liegen, dessen Ebene durch B geht und zu den Spiegelebenen senkrecht steht. Am besten rechnet man die Lage dieser Bilder von B aus, und wir wollen festsetzen, daß wir die Bögen BB_1, BB_2, BB_3 usw. immer im Sinne eines Uhrzeigers zählen, so daß zwar $BB_1 = 2\varphi$ zu setzen ist, aber BB_2 nicht gleich $2\varphi + 2\varphi'$, sondern gleich $360^0 - 2\varphi - 2\varphi'$ zu setzen ist. So erhält man, wie die Figur zeigt, wegen der Abtragungen abwechselnd von A und von A' aus, nacheinander:

$$BB_1 = 2\varphi; \qquad BB_2 = 360^0 - 2\varphi - 2\varphi';$$
$$BB_2 = 4\varphi + 2\varphi'; \quad BB_4 = 360^0 - 4\varphi - 4\varphi';$$
$$BB_5 = 6\varphi + 4\varphi'; \quad BB_6 = 360^0 - 6\varphi - 6\varphi'; \text{ usw.,}$$

so daß wir, im Fall der Index, also auch die Nummer des Bildes ungerade ist, allgemein setzen können:

$$BB_{2n+1} = (2n + 2)\varphi + 2n\varphi'. \tag{1}$$

Wenn aber der Index oder die Nummer des Bildes gerade ist, haben wir zu setzen:

$$(2) \qquad BB_{2n} = 360^{0} - 2n\varphi - 2n\varphi' .$$

Die soeben abgeleiteten Formeln (1) und (2) geben die Lage derjenigen Bilder an, welche von den Strahlen hervorgerufen werden, die, nachdem sie das Objekt B verlassen haben, zuerst den Spiegel S treffen. Was nun diejenigen Bilder anbetrifft, welche von Strahlen herrühren, die zuerst den Spiegel S' treffen, und welche oben durch Strichelung des Buchstabens B von der anderen Bilderreihe unterschieden sind, so ergibt sich für sie, wenn wir wieder von B aus und im Sinne des Uhrzeigers die Bögen messen:

$$BB'_1 = 360^{0} - 2\varphi' ; \qquad BB'_2 = 2\varphi' + 2\varphi ;$$
$$BB'_3 = 360^{0} - 4\varphi' - 2\varphi ; \quad BB'_4 = 4\varphi' + 4\varphi ;$$
$$BB'_5 = 360^{0} - 6\varphi' - 4\varphi ; \quad BB'_6 = 6\varphi' + 6\varphi ; \text{ usw.,}$$

so daß, im Fall der Index und die Nummer des Bildes ungerade ist, allgemein zu setzen ist:

$$(3) \qquad BB'_{2m+1} = 360^{0} - (2m + 2)\varphi' - 2m\varphi .$$

Wenn aber der Index und die Nummer des Bildes gerade ist, haben wir zu setzen:

$$(4) \qquad BB'_{2m} = 2m\varphi' + 2m\varphi .$$

Man kann nun mit Hilfe der Resultate (1) bis (4) leicht erkennen, daß vom Objekt aus in beiden Richtungen die aufeinanderfolgenden Bilder abwechselnd den Bogenabstand 2φ und $2\varphi'$ haben müssen.

Auch lassen sich diese Formeln, vereint mit der Erkenntnis, daß ein zwischen Z und Z' liegendes Bild letztes einer der beiden Reihen sein muß, benutzen, um zwei Ungleichungen aufzustellen, aus denen die genaue Zahl der Bilder eindeutig hervorgeht. Ehe wir jedoch zu dieser Bestimmung übergehen, wollen wir erst prüfen, ob zwei von den Bildern

$$B_1, \; B_2, \; B_3, \; \ldots\ldots, \; B_1', \; B_2', \; B_3', \; \ldots\ldots$$

genau an derselben Stelle liegen können, weil, wenn dies der Fall sein sollte, solche zwei zusammenfallenden Bilder nur als ein einziges zu rechnen wären. Zunächst geht aus der Gewinnung der Bilder durch Abtragung hervor, daß zwei von den mit B_1, B_2, B_3, ... bezeichneten Bildern nicht zusammenfallen können, und daß ebensowenig zwei von den mit B_1', B_2', B_3', ... bezeichneten Bildern an genau derselben Stelle liegen können. Wohl aber könnte es sein, daß ein Bild der ersten Reihe mit einem Bilde der zweiten Reihe zusammenfallen könnte. Wenn zunächst zwei Bilder ungerader Nummer zusammenfallen könnten, müßte, wegen (1) und (3), die folgende Gleichung stattfinden:

$$(2n + 2)\varphi + 2n\varphi' = 360^0 - (2m + 2)\varphi' - 2m\varphi$$

oder, da $\varphi' = \alpha - \varphi$ ist:

$$2n\varphi + 2\varphi + 2n(\alpha - \varphi)$$
$$= 360^0 - 2m(\alpha - \varphi) - 2(\alpha - \varphi) - 2m\varphi$$

oder:

$$2n\alpha + 2\varphi = 360^0 - 2m\alpha - 2\alpha + 2\varphi$$

oder:

$$2n\alpha + 2m\alpha + 2\alpha = 360^0$$

oder:

$$\alpha = \frac{180^0}{n + m + 1}.$$

Wir haben also das Resultat erhalten, daß zwei Bilder, die beide ungerader Nummer sind, zusammenfallen, wenn der Winkel α zwischen den beiden Spiegeln ein Teiler von 180 Grad ist.

Wir prüfen nun zweitens, unter welcher Bedingung zwei Bilder gerader Nummer zusammenfallen können. Zu diesem Zweck haben wir, wegen (2) und (4), anzusetzen:

$$360^0 - 2n\varphi - 2n\varphi' = 2m\varphi' + 2m\varphi,$$

woraus folgt:

$$360^0 = 2n(\varphi + \varphi') + 2m(\varphi + \varphi'),$$

oder, da $\varphi + \varphi' = \alpha$ ist:

$$\alpha = \frac{180^0}{n + m}.$$

Demnach fallen auch zwei Bilder gerader Nummer zusammen, wenn der Winkel α ein Teiler von 180 Grad ist.

Wenn drittens eins der mit B_1, B_3, ... bezeichneten Bilder ungerader Nummer mit einem der mit B_2', B_4', ... bezeichneten Bilder gerader Nummer zusammenfiele, so müßte sein:

$$(2n + 2)\varphi \div 2n\varphi' = 2m\varphi' + 2m\varphi$$

oder, da $\varphi + \varphi' = \alpha$ ist,

$$2n\alpha + 2\varphi = 2m\alpha$$

oder:

$$\varphi = (m - n)\alpha\,,$$

d. h. φ mußte ein Vielfaches von α sein; da aber φ als Teil von α nicht größer als α sein kann, und da φ als größerer der beiden Teile φ und φ' von α auch nicht Null sein kann, so müßte $\varphi = \alpha$ sein, oder, was dasselbe ist, das Objekt müßte im Spiegel S' selbst liegen.

Auf dasselbe Resultat führt auch der vierte Fall, daß eins der Bilder B_2, B_4, ... mit einem der Bilder B'_1, B'_3, B'_5 ... zusammenfiele. Denn:

$$360^{\circ} - 2n\varphi - 2n\varphi' = 360^{\circ} - (2m + 2)\varphi' - 2m\varphi$$

führt, da $\varphi + \varphi' = \alpha$ ist, auf:

$$360^{\circ} - 2n\alpha = 360^{\circ} - 2m\alpha - 2\varphi'$$

oder, da $\varphi' = \alpha - \varphi$ ist:

$$2n\alpha = 2m\alpha + 2\alpha - 2\varphi$$

oder:

$$\varphi = (m - n + 1)\alpha\,,$$

woraus, da φ nicht kleiner als $\frac{\alpha}{2}$ und nicht größer als α sein kann, folgt, daß $\varphi = \alpha$ sein müßte, d. h. wieder, daß das Objekt im Spiegel S' selbst

liegen müßte. Unsere vier Resultate fassen wir nun zu dem folgenden Satze zusammen:

Von den Bildern eines zwischen zwei geneigten Planspiegeln befindlichen Objekts können zwei nur dann dieselbe Lage haben, wenn der Winkel α beider Spiegel ein Teiler von 180 Grad ist, oder wenn das Objekt in einem der Spiegel selbst liegt.

Von den in diesem Satze genannten beiden Grenzfällen sehen wir zunächst ab, setzen also zunächst voraus, daß der Winkel α zwischen den beiden Spiegelebenen kein Teiler von 180 Grad ist, und daß das Objekt diesen Winkel in zwei Teile φ und φ' zerlegt, ohne aber gerade in eine der beiden Spiegelebenen zu fallen. Da wir ferner $\varphi \geqq \varphi'$ voraussetzen, so darf, da $\alpha = \varphi + \varphi'$ ist, $\varphi \geqq \frac{\alpha}{2}$ und $\varphi' \leqq \frac{\alpha}{2}$ vorausgesetzt werden.

Da, wie oben gezeigt ist, B_x das letzte unter allen Bildern ist, die ihre Entstehung den zuerst den Spiegel S treffenden Lichtstrahlen verdanken, wenn B_x auf den Bogen ZZ' zu liegen kommt, so muß $BB_x > BZ'$ und $BB_x < BZ$ sein. Doch kann, wie die Figur zeigt, BB_x auch gleich BZ sein, wenn x gerade ist, und BB_x auch gleich BZ', wenn x ungerade ist. Nun ist aber:

$$BZ = 180^0 + \varphi \quad \text{und} \quad BZ' = 180^0 - \varphi' .$$

Deshalb erhalten wir, falls $x = 2n + 1$ ungerade ist, mit Benutzung von (1):

$$180 - \varphi' \leqq (2n + 2)\varphi + 2n\varphi' < 180^0 + \varphi .$$

Hieraus folgt durch Addition von $\varphi' - \varphi$:

$$180 - \varphi \leqq (2n + 1)\varphi + (2n + 1)\varphi' < 180^0 + \varphi' ,$$

oder, da $\varphi' = \alpha - \varphi$ ist:

$$180 - \varphi \leqq (2n + 1)\alpha < 180 - \varphi + \alpha$$

oder, da $2n + 1$ in unserem Falle gleich x ist:

$$(5) \qquad \frac{180 - \varphi}{\alpha} \leqq x < \frac{180 - \varphi}{\alpha} + 1 .$$

Falls $x = 2n$ gerade ist, erhalten wir mit Benutzung von (2):

$$180 - \varphi' < 360 - 2n\varphi - 2n\varphi' \leqq 180 + \varphi .$$

Subtrahieren wir überall 360^0 und verwandeln wir dann alle Vorzeichen und deshalb auch die Ungleichheitszeichen in die entgegengesetzten, so erhalten wir:

$$180 + \varphi' > 2n\varphi + 2n\varphi' \geqq 180 - \varphi$$

oder, wenn wir diese Ungleichung umgekehrt schreiben und beachten, daß $\varphi' = \alpha - \varphi$ ist:

$$180 - \varphi \leqq 2n\alpha < 180 - \varphi + \alpha$$

oder endlich:

$$(6) \qquad \frac{180 - \varphi}{\alpha} \leqq x < \frac{180 - \varphi}{\alpha} + 1 .$$

Da die Ungleichung (6) mit der Ungleichung (5) völlig identisch ist, so ist zu konstatieren, daß die Unterscheidung, ob x gerade oder ungerade ist, auf das Resultat keinen Einfluß ausübt.

In derselben Weise läßt sich nun eine Ungleichung für die Zahl x' derjenigen Bilder aufstellen, die dadurch erzeugt werden, daß ein Teil aller vom Lichtpunkt B ausgesandten Lichtstrahlen nicht den Spiegel S, sondern den Spiegel S' zuerst trifft. Wie man sich denken konnte, erhält man für x' ein Resultat, das sich von dem soeben gefundenen Resultat (5) oder (6) nur dadurch unterscheidet, daß φ' an die Stelle von φ tritt, also:

$$(7) \qquad \frac{180 - \varphi'}{\alpha} \leqq x' < \frac{180 - \varphi'}{\alpha} + 1 \, .$$

Die für x und für x' abgeleiteten Ungleichungen ergeben jede, da x und x' ganze Zahlen sein müssen, diese ganzen Zahlen unzweideutig, weil die Grenzen sich nur um eins unterscheiden, und weil auf die kleinere Grenze nicht bloß „kleiner" folgt, sondern „kleiner oder gleich". Wie schon anfangs angedeutet, kann man unsere Resultate in Worten so aussprechen:

Um die genaue Anzahl der Bilder zu erhalten, die zwei unter einem Winkel α geneigte ebene Spiegel von einem zwischen ihnen befindlichen Objektspunkte B entwerfen, hat man die Lage von B zwischen den beiden

Spiegelebenen mit zu berücksichtigen, indem man durch B und die Schnittlinie der beiden Spiegelebenen eine Ebene legt, die den Winkel α in die beiden Teile φ und φ' zerlegt, wo φ nicht kleiner als φ' sein mag. Wenn dann der Objektpunkt B nicht gerade in eine Spiegelebene fällt, d. h. wenn φ' nicht Null ist, und wenn außerdem der Winkel α kein Teiler von 180 Grad ist, so ergibt sich die Anzahl der Bilder auf folgende Weise: Man dividiere das Supplement von φ durch α und merke sich, falls die Division aufgeht, die entstandene ganze Zahl x, und falls die Division nicht aufgeht, die nächst größere ganze Zahl x. Ebenso verfahre man mit dem Supplement von φ', wodurch man die ganze Zahl x' erhält. Die Summe $x + x'$ der gemerkten Zahlen ist stets die Anzahl der entstandenen Bilder.

Der Fall, daß α ein Teiler von 180 Grad ist, ist schon oben behandelt. In diesem Falle haben die beiden letzten Bilder, die in den Scheitelwinkelraum des Spiegelwinkels fallen, genau dieselbe Lage; wenn sie dann nur als ein einziges Bild betrachtet werden sollen, so ist die erhaltene Summe $x + x'$ noch um eins zu erniedrigen. Wenn der Objektpunkt in einer der beiden Spiegelebenen liegt, also $\varphi' = 0$, $\varphi = \alpha$ ist, so hat man nur eine einzige Reihe von Bildern.

Ihre Anzahl ergibt sich aus (5) oder (6), wenn wir $\varphi = \alpha$ setzen. Es ergibt sich dann aus:

$$\frac{180^0 - \alpha}{\alpha} \leqq x < \frac{180^0 - \alpha}{\alpha} + 1$$

oder:

$$\frac{180^0}{\alpha} - 1 \leqq x < \frac{180^0}{\alpha},$$

daß man, um in diesem besonderen Falle die Zahl der Bilder zu finden, 180 Grad durch α zu dividieren hat. Falls die Division aufgeht, ist die Anzahl der Bilder um eins kleiner als das Resultat der Division. Falls die Division nicht aufgeht, so ist die Anzahl der Bilder gleich der bei der Division resultierenden ganzen Zahl.

Nachdem nunmehr die Frage nach der Lage und der Anzahl der Bilder bei zwei geneigten Spiegeln erschöpfend erledigt ist, gehen wir zu dem allgemeinen Fall zurück, der durch die beiden Ungleichungen (5) und (7) erledigt wird. Diese lauteten:

$$\frac{180^0 - \varphi}{\alpha} \leqq x < \frac{180^0 - \varphi}{\alpha} + 1$$

$$\frac{180^0 - \varphi'}{\alpha} \leqq x' < \frac{180^0 - \varphi'}{\alpha} + 1 .$$

Beim Anblick dieser beiden Ungleichungen kommt man leicht zu der Frage, ob nicht durch Addition derselben $x + x'$ aus einer, statt aus zwei Ungleichungen bestimmt werden kann. Diese Frage zu entscheiden,

addieren wir dieselben, wodurch wir, wenn wir $\varphi + \varphi' = \alpha$ setzen, erhalten:

$$\frac{360^0}{\alpha} - 1 \leqq x + x' < \frac{360}{\alpha} + 1 \,.$$

Diese Ungleichung läßt aber zweifelhaft, ob die gesuchte Bilderzahl $x + x'$ gleich $\frac{360^0}{\alpha} - 1$ ist oder gleich $\frac{360^0}{\alpha}$ ist. Man erkennt zugleich, daß die herkömmliche Angabe, die Anzahl der Bilder bei zwei unter einem Winkel α geneigten Planspiegeln sei gleich $\frac{360^0}{\alpha} - 1$ falsch ist, wenn nicht hinzugefügt wird: „oder $\frac{360^0}{\alpha}$, je nach der Lage des Objekts zwischen den beiden Spiegeln". Wenn beispielsweise $\alpha = 72^0$ ist, so ergibt $\frac{360^0}{72^0} - 1 = 4$. Nach der herkömmlichen Art, die Anzahl der Bilder zu berechnen, müßte man also sagen, daß, wenn zwei Planspiegel unter 72^0 geneigt sind, ein zwischen ihnen befindliches Objekt noch viermal außerdem gesehen werden kann. Unsere Formeln aber ergeben, daß dies nur in dem speziellen Falle richtig ist, wo das Objekt genau in der Halbierungsebene des Winkels α zwischen den beiden Spiegeln sich befindet. Denn dann wird $x = 2$ und auch $x' = 2$. Sobald aber das Objekt aus der Halbierungsebene herausgerückt wird,

so daß $\varphi > \frac{\alpha}{2}$, $\varphi' < \frac{\alpha}{2}$ wird, entsteht ein fünftes Bild, wovon sich jedermann auch experimentell überzeugen kann. Wenn beispielsweise $\varphi = 40^0$, $\varphi' = 32^0$ ist, ergeben unsere Ungleichungen:

$$\frac{140^0}{72^0} \leqq x < \frac{140^0}{72^0} + 1 \quad \text{oder} \quad x = 2$$

$$\frac{148^0}{72^0} \leqq x' < \frac{148^0}{72^0} + 1 \quad \text{oder} \quad x' = 3\,,$$

so daß $x + x' = 5$ wird. Was soeben für $\alpha = 72^0$ erörtert ist, gilt genau so, wenn die Division von 360^0 durch α^0 irgend eine andere ungerade ganze Zahl ergibt. Aus unseren grundlegenden Ungleichungen folgt auch, wie die genaue Anzahl der Bilder sich ergibt, wenn man die Division von 360^0 durch den Spiegelwinkel α^0 zugrunde legt. Bleibt bei dieser Division kein Rest, sondern ergibt sich die ganze Zahl p, so ist, wie schon oben erörtert ist, wenn p gerade ist, die genaue Zahl der Bilder gleich $p - 1$, weil die beiden letzten Bilder zusammenfallen. Wenn aber die Division aufgeht und die ungerade Zahl p ergibt, so ist im allgemeinen die Anzahl der Bilder gleich p und nur in dem speziellen Falle gleich $p - 1$, wenn der lichtgebende Punkt genau auf der Halbierungsebene des Spiegelwinkels α liegt.

Wenn aber bei der Division von 360 Grad durch α die ganze Zahl p und ein hinzukommender

Rest sich ergibt, so kann die Anzahl der Bilder gleich p und gleich $p+1$ sein, je nach der Lage des Objekts.

Da in diesem Falle die Angabe der Bilderzahl komplizierter wird und sich zeigt, daß wir die beiden Teilwinkel φ und φ' dochnicht umgehen können, so ist es ratsam, die Entscheidung über die Anzahl der Bilder immer durch unsere grundlegenden Ungleichungen (5) und (7) zu bewerkstelligen. Wir lassen noch einige Beispiele folgen:

(1) $\alpha = 21^0$, $\varphi = 12^0$, $\varphi' = 9^0$. Aus $\frac{168^0}{21^0} = 8$

und $\frac{171^0}{21^0} = 8\frac{1}{7}$ folgt $x + x' = 8 + 9 = 17$;

(2) $\alpha = 21^0$, $\varphi = 11^0$, $\varphi' = 10^0$. Aus $\frac{169^0}{21^0} = 8\frac{1}{21}$

und $\frac{170^0}{21^0} = 8\frac{2}{21}$ folgt $x + x' = 9 + 9 = 18$;

(3) $\alpha = 19^0$, $\varphi = 10^0$, $\varphi' = 9^0$. Aus $\frac{170^0}{19^0} = 8\frac{18}{19}$

und $\frac{171^0}{19^0} = 9$ folgt $x + x' = 9 + 9 = 18$;

(4) $\alpha = 19^0$, $\varphi = 12^0$, $\varphi' = 7^0$. Aus $\frac{168^0}{19^0} = 8\frac{16}{19}$

und $\frac{173^0}{19^0} = 9\frac{2}{19}$ folgt $x + x' = 9 + 10 = 19$;

(5) $\alpha = 18^0$, $\varphi = 10^0$, $\varphi' = 8^0$. Aus $\frac{170^0}{18^0} = 9\frac{4}{9}$

und $\frac{172^0}{18^0} = 9\frac{5}{9}$ folgt zwar $x + x' = 10 + 10 = 20$;

da aber α ein Teiler von 180 Grad ist, so fallen die beiden Bilder zusammen, die im Scheitelwinkelraum des Spiegelwinkels liegen, wodurch es kommt, daß man das Objekt nicht 20mal, sondern nur 19mal in den beiden Spiegeln erblickt.

Da man, um die obigen Resultate empirisch zu erhärten, dem einen von zwei geneigten Spiegeln eine feste vertikale Lage geben wird, ferner den anderen um eine vertikale feste Achse drehen wird und das Objekt auf einen horizontalen Tisch stellen wird, so wird bei einer solchen Einrichtung der kleinere Winkel φ' konstant, während φ und deshalb auch α veränderlich wird. Wir schließen deshalb mit einer Tabelle, die für $\varphi' = 15^0$ angibt, wie groß α sein muß, damit so und soviel Bilder entstehen können.

Für $\varphi' = 15^0$ entsteht:

1	Bild, wenn	α	kleiner	als	195^0	wird;
2	Bilder, wenn	α	„	„	165^0	„
3	„ „	α	„	„	$97\frac{1}{2}^0$	„
4	„ „	α	„	„	$82\frac{1}{2}^0$	„
5	„ „	α	„	„	65^0	„
6	„ „	α	„	„	55^0	„
7	„ „	α	„	„	$48\frac{3}{4}^0$	„
8	„ „	α	„	„	$41\frac{1}{4}^0$	„
9	„ „	α	„	„	39^0	„

10 Bilder, wenn α kleiner als 33^0 wird;
11 „ „ α „ „ $32\frac{1}{2}^0$ „

Die Ausdehnung der obigen Erörterungen auf den Fall, daß zwischen drei oder noch mehr beliebig zueinander gestellten Spiegeln ein leuchtender Punkt in allgemeiner Lage befindlich ist, dürfte noch nicht gelungen sein, trotzdem außer dem Verfasser, auch der verstorbene Edmund Heß, eine Autorität auf dem Gebiete der Kugelteilung, sich viele Mühe gegeben haben, diese Ausdehnung zu bewerkstelligen.

V. Abschnitt.

Volumen des Obelisken aus Höhe und zwei oder drei beliebig gelegten Parallelschnitten.

Aus der Formel für das Volumen des Pyramidenstumpfs:

$$V = \frac{h}{3}\left[g + g' + \sqrt{gg'}\right],$$

wo h seine Höhe, g und g' die Inhalte seiner beiden Grundflächen bedeuten, lassen sich bekanntlich auf arithmetischem Wege Formeln für das Volumen des Obelisken ableiten, und zwar durch folgende Überlegung. Wenn man durch eine Seitenkante eines vierkantigen Obelisken eine beliebige Ebene legt, und diese Ebene mit den beiden der Seitenkante gegenüberliegenden Seitenflächen zum Schnitt bringt, so erscheint der vierkantige Obelisk als Differenz eines großen dreikantigen Obelisken und der Summe zweier kleinerer dreikantiger Obelisken, und nicht allein in den Ebenen der beiden Grundflächen, sondern auch in

jeder diesen Ebenen parallelen dritten Ebene erscheint das aus dem vierkantigen Obelisken ausgeschnittene Viereck als Differenz des Dreiecks, das aus dem großen dreikantigen Obelisken ausgeschnitten wird, und der Summe der beiden Dreiecke, die aus den beiden kleineren dreikantigen Obelisken ausgeschnitten werden. Wenn man ferner zwei nicht benachbarte aber auch nicht parallele Seitenflächen eines n-kantigen Obelisken zum Schnitt bringt, so erscheint der n-kantige Obelisk als Differenz eines m-kantigen und eines p-kantigen Obelisken, wo $m < n$ und $p < n$ ist, und zwar wiederum so, daß auf jeder den Grundflächen parallelen Ebene das aus dem n-kantigen Obelisken ausgeschnittene n-Eck die Differenz des m-Ecks und des p-Ecks ist, die aus dem m-kantigen und p-kantigen Obelisken ausgeschnitten werden. Demnach ist jeder n-kantige Obelisk eine algebraische Summe von lauter dreikantigen Obelisken, und auf jeder den Grundflächen parallelen dritten Ebene erscheint das aus dem n-kantigen Obelisken ausgeschnittene n-Eck als entsprechende algebraische Summe der Dreiecke, die aus den dreikantigen Obelisken ausgeschnitten werden. Nun ist aber jeder dreikantige Obelisk ein Pyramidenstumpf, weil zwei Dreiecke, die in zwei parallelen Ebenen liegen und parallele Seiten haben, ähnlich sein müssen. Wir können deshalb den Schluß ziehen, daß, wenn eine für das Volumen des Pyramidenstumpfs abgeleitete Formel die Gestalt hat:

$$V = \frac{h}{3}[x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + x_3 \cdot a_3 + \ldots],$$

wo h die Höhe, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Inhalte von Parallelflächen, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Zahlenkoeffizienten bedeuten, diese Formel auch ohne weiteres für beliebige Obelisken gültig ist.

Nun hat aber die zu Anfang erwähnte Formel für das Volumen des Pyramidenstumpfs wegen des darin vorkommenden Gliedes $\sqrt{gg'}$ die gewünschte Gestalt nicht. Es entsteht daher die Aufgabe, diese Formel so umzugestalten, daß in der eckigen Klammer eine Summe von mit Zahlenkoeffizienten multiplizierten Flächeninhalten für Polygone entsteht, welche von Ebenen ausgeschnitten werden, die den beiden Grundflächen parallel sind. Diese Aufgabe kann man dadurch lösen, daß man den Inhalt a des Polygons, das auf einer beliebigen den Grundflächen parallelen Ebene entsteht, durch die Inhalte g und g' der beiden Grundflächen und durch die Abstände

$$\alpha \cdot h \quad \text{und} \quad \alpha' \cdot h$$

ausdrückt, welche die beliebige Ebene von den Ebenen der Grundflächen hat. Hierbei muß die Summe der Zahlenkoeffizienten α und α' gleich Eins sein, weil $\alpha h + \alpha' h = h$ ist. Um a in seiner Abhängigkeit von g, g', α, α' darzustellen, verlängern wir die Seitenflächen eines Pyramidenstumpfs bis zum Schnitt so, daß die Ergänzungspyramide entsteht, und bezeichnen deren

Höhe mit ξh. Nun verhalten sich aber die Inhalte g', a, g zueinander wie die Quadrate der Abstände der Spitze der Ergänzungspyramide von den Ebenen, in denen diese Inhalte liegen. Deshalb muß sein:

$$g' : a = (\xi h)^2 : (\xi h + \alpha' h)^2$$

oder:

$$\sqrt{g'} : \sqrt{a} = \xi : \xi + \alpha'$$

oder:

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{g'}}{\sqrt{g'}} = \frac{\alpha'}{\xi}. \tag{1}$$

Ebenso erhält man:

$$g' : g = (\xi h)^2 : (\xi h + h)^2$$

oder:

$$\sqrt{g'} : \sqrt{g} = \xi : \xi + 1$$

oder:

$$\frac{\sqrt{g} - \sqrt{g'}}{\sqrt{g'}} = \frac{1}{\xi}. \tag{2}$$

Dividiert man nun (1) durch (2), so erhält man:

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{g'}}{\sqrt{g} - \sqrt{g'}} = \alpha'$$

oder:

$$\sqrt{a} = \alpha' \cdot \sqrt{g} - \alpha' \cdot \sqrt{g'} + \sqrt{g'}$$

oder, da $\alpha' = 1 - \alpha$ ist:

$$\sqrt{a} = \alpha' \cdot \sqrt{g} + \alpha \cdot \sqrt{g'}. \tag{3}$$

Wenn man nun (3) quadriert, so erhält man:

$$(4) \qquad a = \alpha'^2 \cdot g + \alpha^2 \cdot g' + 2\,\alpha\,\alpha' \cdot \sqrt{g g'} \,.$$

Hieraus folgt:

$$\sqrt{g g'} = \frac{a}{2\,\alpha\,\alpha'} - \frac{\alpha'}{2\,\alpha} \cdot g - \frac{\alpha}{2\,\alpha'} \cdot g' \,.$$

Setzt man nun das soeben für $\sqrt{g g'}$ erhaltene Resultat in die Formel für das Volumen des Pyramidenstumpfs ein, so erhält man:

$$V = \frac{h}{3}\left[g + g' + \frac{1}{2\,\alpha\,\alpha'} \cdot a - \frac{\alpha'}{2\,\alpha} \cdot g - \frac{\alpha}{2\,\alpha'} \cdot g'\right]$$

oder:

$$(5) \quad V = \frac{h}{3}\left[\left(1 - \frac{\alpha'}{2\,\alpha}\right) \cdot g + \left(1 - \frac{\alpha}{2\,\alpha'}\right) \cdot g' + \frac{1}{2\,\alpha\alpha'} \cdot a\right].$$

Diese Formel hat nun die gewünschte Gestalt, und muß deshalb für jeden Obelisken gelten. Da ein Prismatoid, in dessen Grundflächen ein m-Eck und ein p-Eck liegen, als ein $(m+p)$-kantiger Obelisk aufgefaßt werden kann, so drückt die Formel (5) auch das Volumen jedes Prismatoids aus. Da α willkürlich gewählt werden darf, so umfaßt Formel (5) unzählig viele Formeln. Setzt man $\alpha = \frac{1}{2}$, also auch $\alpha' = \frac{1}{2}$, so erhält man aus (5) die gewöhnliche Formel für das Volumen des Obelisken, nämlich:

$$(6) \qquad V = \frac{h}{6}[g + g' + 4\,m] \,,$$

wo g und g' die Inhalte der beiden Grundflächen, m den Inhalt der Mittelfläche bedeutet, d. h. desjenigen

Polygons, dessen Ebene die Höhe des Obelisken halbiert. Setzt man $\alpha = \frac{2}{3}$, $\alpha' = \frac{1}{3}$, so erhält man für den Koeffizienten von g' null und deshalb das Volumen durch die Höhe und nur zwei Parallelflächen ausgedrückt, nämlich:

$$(7) \qquad V = \frac{h}{3}\left[\tfrac{3}{4} g + \tfrac{9}{4} d\right] = \frac{h}{4}[g + 3\,d]\,,$$

wo g den Inhalt der Grundfläche und d den Inhalt desjenigen Polygons bedeutet, das eine Ebene ausschneidet, deren Abstand von der Grundfläche zwei Drittel der Höhe ist. Es wird nun aus dem folgenden hervorgehen, daß das Volumen des Obelisken sich auch durch die Höhe und irgendwelche drei Parallelflächen ausdrücken läßt, wenn die Abstände dieser Parallelflächen von der Grundfläche bekannt sind, und daß es unendlich viele Formeln gibt, welche das Volumen des Obelisken durch die Höhe und nur zwei Parallelflächen ausdrücken.

Um dieses einzusehen, wiederholen wir die Formel (4) für zwei andere Ebenen, die den Grundflächen parallel sind. Wenn diese Ebenen aus dem Obelisken Polygone ausschneiden, die den Inhalt b und c haben, und wenn sie von der Ebene der Grundfläche g die Abstände $\beta \cdot h$ bzw. $\gamma \cdot h$ haben, so daß die Abstände von der Ebene der Grundfläche g' bzw. $\beta' \cdot h = (1 - \beta) \cdot h$ und $\gamma' \cdot h = (1 - \gamma) h$ sind, so lauten die drei Formeln für a, b, c folgendermaßen:

$$(8)\quad \begin{cases} a = \alpha'^2 \cdot g + \alpha^2 \cdot g' + 2\alpha\alpha' \cdot \sqrt{gg'} \\ b = \beta'^2 \cdot g + \beta^2 \cdot g' + 2\beta\beta' \cdot \sqrt{gg'} \\ c = \gamma'^2 \cdot g + \gamma^2 \cdot g' + 2\gamma\gamma' \cdot \sqrt{gg'}\,. \end{cases}$$

Indem wir die erste Gleichung dieses Gleichungssystems mit $\beta\beta'$, die zweite mit $\alpha\alpha'$ multiplizieren, und dann subtrahieren, erhalten wir:

$$a\,\beta\beta' - b\,\alpha\alpha' = (g\,\alpha'\,\beta' - g'\,\alpha\,\beta)(\alpha'\,\beta - \alpha\,\beta')\,,$$

und, da $\alpha'\,\beta - \alpha\,\beta' = (1-\alpha)\,\beta - \alpha\,(1-\beta) = \beta - \alpha$ ist:

$$(9)\quad a\,\beta\beta' - b\,\alpha\alpha' = (g\,\alpha'\,\beta' - g'\,\alpha\,\beta)(\beta - \alpha)\,.$$

Analog muß gelten:

$$(10)\quad a\,\gamma\gamma' - c\,\alpha\alpha' = (g\,\alpha'\,\gamma' - g'\,\alpha\,\gamma)(\gamma - \alpha)\,.$$

Multipliziert man nun (9) mit $\gamma\,(\gamma - \alpha)$ und (10) mit $\beta\,(\beta - \alpha)$, so erhält man durch Subtraktion:

$$\begin{aligned} a\,[\beta\beta'\,\gamma\,(\gamma-\alpha) - \gamma\gamma'\,\beta\,(\beta-\alpha)] - b\cdot\alpha\alpha'\,\gamma\,(\gamma-\alpha) \\ + c\cdot\alpha\alpha'\,\beta\,(\beta-\alpha) = g\,[\alpha'\,\beta'\,\gamma\,(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) \\ - \alpha'\,\gamma'\,\beta\,(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)]\,. \end{aligned}$$

Beachtet man nun bei dem Ausdruck, mit dem hier a multipliziert erscheint, daß $\beta'\,(\gamma-\alpha) - \gamma'\,(\beta-\alpha)$ $= (1-\beta)(\gamma-\alpha) - (1-\gamma)(\beta-\alpha) = \gamma\,(1-\alpha)$ $- \beta\,(1-\alpha) = (1-\alpha)(\gamma-\beta) = \alpha'\,(\gamma-\beta)$ ist, so erhält man:

$$\begin{aligned} a\beta\gamma\,\alpha'\,(\gamma-\beta) + b\,\gamma\,\alpha\alpha'\,(\alpha-\gamma) + c\,\alpha\,\beta\,\alpha'\,(\beta-\alpha) \\ = g\,\alpha'\,(\beta'\,\gamma - \beta\,\gamma')(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\,. \end{aligned}$$

Nun hat man nur noch durch α' zu heben, $\beta'\gamma - \beta\gamma'$ durch das ihm gleiche $\beta - \gamma$ zu ersetzen, und beiderseits mit minus eins zu multiplizieren, um für g den folgenden symmetrischen Ausdruck zu erhalten:

$$g = -\frac{a\beta\gamma(\beta-\gamma) + b\gamma\alpha(\gamma-\alpha) + c\alpha\beta(\alpha-\beta)}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}.$$

Hieraus folgt aber:

$$(11)\qquad g = \frac{\beta\gamma}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}\cdot a + \frac{\gamma\alpha}{(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)}\cdot b + \frac{\alpha\beta}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\cdot c.$$

Aus (11) erhält man g', indem α' statt α, β' statt β, γ' statt γ setzt. Wenn man dann noch $1-\alpha$ statt α', $1-\beta$ statt β', $1-\gamma$ statt γ' setzt, so erhält man:

$$(12)\qquad g' = \frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}\cdot a + \frac{(1-\gamma)(1-\alpha)}{(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)}\cdot b + \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\cdot c.$$

Wenn man nun die in (11) und (12) für g und g' erhaltenen Ausdrücke in eine der drei Gleichungen des Gleichungssystems (8) einsetzt, so erhält man:

$$(13)\qquad \sqrt{gg'} = \frac{2\beta\gamma-\beta-\gamma}{2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}\cdot a + \frac{2\gamma\alpha-\gamma-\alpha}{2(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)}\cdot b + \frac{2\alpha\beta-\alpha-\beta}{2(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\cdot c.$$

Ersetzt man nun g, g', $\sqrt{gg'}$ in der Volumenformel des Pyramidenstumpfs durch die in (11), (12), (13) erhaltenen Ausdrücke, so erhält man das Volumen des Pyramidenstumpfs und deshalb auch des Obelisken durch die Höhe und die Inhalte von drei Polygonen ausgedrückt, die auf drei Ebenen entstehen, welche mit der Ebene der Grundfläche g im Abstande $\alpha \cdot h$, $\beta \cdot h$, $\gamma \cdot h$ parallel laufen, nämlich:

$$(14) \qquad V = \frac{h}{3}\left[\frac{6\beta\gamma - 3\beta - 3\gamma + 2}{2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} \cdot a + \frac{6\gamma\alpha - 3\gamma - 3\alpha + 2}{2(\gamma - \beta)(\alpha - \beta)} \cdot b + \frac{6\alpha\beta - 3\alpha - 3\beta + 2}{2(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)} \cdot c\right].$$

Setzt man hier $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, so erhält man die oben mit (6) bezeichnete Formel. Setzt man $\alpha = 0$, $\beta = \frac{2}{3}$, so wird der Koeffizient von c gleich Null, und es entsteht die oben mit (7) bezeichnete Formel.

Es liegt nahe, die Formel (14) zu benutzen, um alle Formeln zu erhalten, welche das Volumen eines Obelisken durch die Höhe, die Mittelfläche und zwei Flächeninhalte ausdrücken, deren Ebenen von der Ebene der Mittelfläche gleichen Abstand haben. Wir setzen deshalb:

$$\alpha = \tfrac{1}{2} - \varepsilon, \quad \beta = \tfrac{1}{2}, \quad \gamma = \tfrac{1}{2} + \varepsilon.$$

Dann wird

$$x_a = \frac{1}{8\,\varepsilon^2}, \quad x_b = \frac{12\,\varepsilon^2 - 1}{4\,\varepsilon^2}, \quad x_c = \frac{1}{8\,\varepsilon^2},$$

wo x_a, x_b, x_c die in (14) mit den Inhalten a, b, c multiplizierten Zahlenkoeffizienten sind. Demnach erhält man:

$$(15) \qquad V = \frac{h}{3}\left[\frac{a}{8\,\varepsilon^2} + \frac{12\,\varepsilon^2 - 1}{4\,\varepsilon^2}\cdot b + \frac{c}{8\,\varepsilon^2}\right].$$

Mit Hilfe von (15) kann man die Aufgabe lösen, in welcher Entfernung von der Mittelfläche nach der einen und nach der anderen Seite man zwei Parallelflächen legen muß, damit das Volumen des Obelisken gleich der Höhe mal dem arithmetischen Mittel der drei Parallelflächen werde. Es muß dann $8\,\varepsilon^2 = 1$, sowie $\frac{12\,\varepsilon^2 - 1}{4\,\varepsilon^2} = 1$ sein, was der Fall ist, wenn $\varepsilon = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ ist. Wir erhalten also:

$$(16) \qquad V = \frac{h}{3}[a + b + c];$$

oder in Worten:

Wenn man die Höhe h eines Obelisken halbiert und vom Halbierungspunkt aus nach beiden Seiten hin $\frac{h}{4}\sqrt{2}$ abträgt, und wenn man dann durch die erhaltenen drei Punkte senkrecht zur Höhe Ebenen legt, so schneiden diese Ebenen aus dem Obelisken drei Poly-

gone aus, deren arithmethisches Mittel Grundfläche eines Prismas ist, welches mit dem Obelisken gleiche Höhe und gleiches Volumen hat.

Auch kann das Volumen des Obelisken gleich dem Produkte der Höhe und dem arithmetischen Mittel von nur zwei Parallelflächen gesetzt werden. Wenn man nämlich $\varepsilon = \frac{1}{6}\sqrt{3}$ setzt, so wird der Koeffizient von x_b der Mittelfläche b gleich Null, und die beiden andern Koeffizienten x_a und x_c werden $\frac{3}{2}$, so daß wir erhalten:

$$V = \frac{h}{2}(a + c)\,, \tag{17}$$

oder in Worten:

Wenn man vom Halbierungspunkt der Höhe h eines Obelisken nach beiden Seiten hin $\frac{h}{6}\sqrt{3}$ abträgt, und durch die erhaltenen beiden Punkte senkrecht zur Höhe Ebenen legt, so schneiden diese Ebenen aus dem Obelisken zwei Polygone aus, deren arithmetisches Mittel Grundfläche eines Prismas ist, welches mit dem Obelisken gleiche Höhe und gleiches Volumen hat.

Man bemerke ferner, daß der mittlere Koeffizient positiv oder negativ wird, je nachdem ε größer oder kleiner als $\frac{1}{6}\sqrt{3}$ ist. Zum Beispiel kommt:

$$\text{für } \varepsilon = \tfrac{1}{3}: \quad V = \frac{h}{8}[3a + 2b + 3c]$$

$$\text{und für } \varepsilon = \tfrac{1}{4}: \quad V = \frac{h}{3}[2a - b + 2c].$$

Schon mehrfach ist oben das Volumen des Obelisken durch die Höhe und nur zwei Parallelflächen ausgedrückt. Um einzusehen, daß dies auf unzählig viele Weise möglich ist, setzen wir den einen der drei Koeffizienten, mit denen in Formel (14) a, b, c multipliziert sind, gleich Null. Es sei der Koeffizient x_c des Flächeninhalts c gleich Null. Wir erhalten also die Bedingungsgleichung:

$$6\alpha\beta - 3\alpha - 3\beta + 2 = 0 \tag{18}$$

oder:

$$\alpha = \frac{2 - 3\beta}{3(1 - 2\beta)}. \tag{19}$$

Um hieraus x_a den Koeffizienten von a zu bestimmen, berechnen wir zunächst:

$$\gamma - \alpha = \frac{3\gamma - 6\beta\gamma - 2 + 3\beta}{3(1 - 2\beta)},$$

woraus folgt:

$$\frac{6\beta\gamma - 3\beta - 3\gamma + 2}{\gamma - \alpha} = 3(2\beta - 1).$$

Deshalb ist:

$$x_a = \frac{3}{2}\,\frac{2\beta - 1}{\beta - \alpha}. \tag{20}$$

Analog muß sich für den Koeffizienten x_b des Flächeninhalts b ergeben:

$$x_b = \frac{3}{2} \frac{1 - 2\alpha}{\beta - \alpha}. \tag{21}$$

Da aber α und β durch die Gleichung (18) zusammenhängen, so ist es besser, x_a und x_b durch nur einen der Buchstaben α und β auszudrücken. Mit Benutzung von (19) erhalten wir aus (20):

$$x_a = \frac{9}{2} \cdot \frac{(1 - 2\beta)^2}{2 - 6\beta + 6\beta^2}; \tag{22}$$

$$x_b = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2 - 6\beta + 6\beta^2};$$

oder:

$$x_a = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2 - 6\alpha + 6\alpha^2}; \tag{23}$$

$$x_b = \frac{9}{2} \cdot \frac{(1 - 2\alpha)^2}{2 - 6\alpha + 6\alpha^2}.$$

Hiernach erhalten wir aus (14):

$$V = \frac{h}{3}\left[\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2 - 6\alpha + 6\alpha^2} \cdot a + \frac{9}{2} \cdot \frac{(1 - 2\alpha)^2}{2 - 6\alpha + 6\alpha^2} \cdot b\right]$$

oder:

$$V = \frac{h}{4}\left[\frac{1}{1 - 3\alpha + 3\alpha^2} \cdot a\right. \tag{24}$$

$$+ \frac{3(1-2\alpha)^2}{1-3\alpha+3\alpha^2} \cdot b\Big]$$

oder auch:

$$(25) \qquad V = \frac{h}{4}\left[\frac{3(1-2\beta)^2}{1-3\beta+3\beta^2} \cdot a + \frac{1}{1-3\beta+3\beta^2} \cdot b\right].$$

Hieraus ergibt sich Formel (7) für $\alpha = 0$, $\beta = \frac{2}{3}$, sowie auch (17) für $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$, $\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$.

Wir wählen noch als Beispiele $\alpha = \frac{1}{3}$ und $\alpha = \frac{1}{4}$. Für $\alpha = \frac{1}{3}$ ergibt (18) $\beta = 1$. Dadurch erhält man Formel (7) noch einmal, nur mit dem unwesentlichen Unterschiede, daß jetzt das Volumen des Obelisken durch die Grundfläche g' und diejenige Fläche ausgedrückt ist, deren Ebene um zwei Drittel der Höhe von g' entfernt ist. Für $\alpha = \frac{1}{4}$ ergibt die Bedingung (18), daß $\beta = \frac{5}{6}$ sein muß, so daß sich ergibt:

$$(26) \qquad V = \frac{h}{7}[4a + 3b],$$

wo a der Flächeninhalt des Polygons ist, dessen Ebene in einem Viertel der Höhe parallel zu der einen Grundfläche gelegt ist, und wo b der Flächeninhalt des Polygons ist, dessen Ebene in fünf Sechstel der Höhe parallel zu der einen Grundfläche gelegt ist. In diesem Falle ist der Abstand der beiden parallelen Ebenen sieben Zwölftel der Höhe. Da nun

bei Formel (7) der Abstand der Parallelflächen zwei Drittel oder acht Zwölftel war, so liegt die Frage nahe, ob nicht bei wachsendem α, das wir kleiner als β voraussetzen wollen, der Abstand der Parallelflächen einem Minimum zustrebt. Eine genauere Untersuchung ergibt, daß das Minimum im Fall der Formel (17) erreicht wird, wo der Abstand

$$2 \cdot \frac{h}{6} \sqrt{3} = \frac{h}{3} \sqrt{3} = \frac{h}{3} \cdot 1{,}732 = h \cdot 0{,}577$$

beträgt, oder in Worten:

In den unzählig vielen Fällen, in denen das Volumen eines Obelisken durch die Höhe und nur zwei Polygone ausdrückbar ist, die in zwei Ebenen liegen, die den Grundflächen parallel sind, haben diese Ebenen den geringsten Abstand, wenn sie gleiche Entfernung von der die Höhe halbierenden Ebene haben, und zwar beträgt dieser geringste Abstand $\frac{h}{3}\sqrt{3}$, wenn h die Höhe ist, das Volumen ist in diesem Falle gleich dem Produkte der Höhe mit dem arithmetischen Mittel der Inhalte der beiden Polygone.

VI. Abschnitt.

Über eine beim Aufbau des absoluten Maßsystems begangene Inkonsequenz.[1]

Länge, Zeit und Masse sind die drei Größen, aus denen das absolute Maßsystem der Physik, der Dimension nach, alle sonstigen physikalischen Größen zusammensetzt. Als Einheiten hat man dabei beziehungsweise das Zentimeter, die Sekunde und die normale Gramm-Masse gewählt. Demgemäß wird die Dimension jeder physikalischen Größe ein Produkt von Potenzen der Buchstaben l, t, m, wo l Länge, t Zeit, m Masse bedeuten soll. Da der reziproke Wert einer Potenz gleich derjenigen Potenz ist, die dieselbe Basis, aber den entsprechenden negativen Exponenten hat, so treten als Exponenten jener Potenzen auch negative Zahlen auf, wie z. B. bei der

---

[1]) Diese Erörterung erschien schon am 22. Dezember 1895 in der von Potonié redigierten und von Dümmler in Berlin verlegten „Naturwissenschaftlichen Wochenschrift". Die Verlagsbuchhandlung hat den Abdruck in diesem Buche freundlichst gestattet.

„Beschleunigung“, deren Dimension $l \cdot t^{-2}$ ist. Hiergegen wird sich der gesunde Menschenverstand nicht sträuben können, da ja mit Hilfe eines Bruchstrichs jeder negative Exponent entfernt werden kann, indem z. B. $l \cdot t^{-2}$ nur eine andere Schreibweise für $\frac{l}{t^2}$ ist. Aber seit Einführung der magnetischen, elektro-magnetischen und elektrostatischen Maße enthalten die Dimensions-Symbole auch gebrochene Exponenten. Beispielsweise ist das Volt von der Dimension $m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-2}$, das Ampère von der Dimension $m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-1}$. Wenn der gesunde Menschenverstand sich gegen $m^{\frac{1}{2}}$, d. h. Quadratwurzel aus Masse, oder gegen $l^{\frac{3}{2}}$, d. h. Quadratwurzel aus der dritten Potenz der Länge, sträubt, so kann man ihm das wirklich nicht übel nehmen. Schon als das absolute Maß-System eingeführt wurde, erkannte der Verfasser, daß diese Mißgeburten der Physik ihren Ursprung der Inkonsequenz verdanken, die man begeht, wenn man beim (Newtonschen) Gesetze der Massen-Anziehung den Proportionalitätsfaktor (Gravitations-Konstante) nicht gleich 1 setzt, bei den Gesetzen der magnetischen und der elektrostatischen Anziehung aber doch gleich 1 setzt. Der Verfasser äußerte damals seine Bedenken gegen die magnetischen und elektrischen Dimensionen nur mündlich seinen physikalischen Freunden gegenüber; nur mündlich, erstens, weil ihm

der konsequente Aufbau der physikalischen Dimensionen als etwas Selbstverständliches erschien, zweitens, weil es schließlich von geringer Bedeutung ist, ob man eine Dimension so oder so schreibt, wenn die Forschung darunter nicht leidet. Kürzlich jedoch erfuhr der Verfasser, daß auch Physiker[1]) schon die Frage eines besseren Dimensions-Systems gestreift hätten, ohne jedoch dasselbe vollständig aufzustellen. Hierdurch ermutigt, legt der Verfasser nunmehr im folgenden denjenigen Aufbau der physikalischen Dimensionen vor, der nach seiner Meinung der einzig konsequente ist. Dabei denkt der Verfasser keineswegs an irgendwelche Änderung des bestehenden Maßsystems. Es kommt ihm vielmehr nur darauf an, zu zeigen, daß ein naturgemäßer Aufbau eines Maßsystems nicht zu kompliziert zusammengesetzten Dimensions-Symbolen, wie $m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-2}$, sondern zu äußerst einfachen Symbolen führt.

In der Physik leitet man jede neue Größe aus einer, zwei oder mehr anderen, schon als bekannt

---

[1]) Helmholtz in Wiedemanns Annalen Bd. 17, S. 44, und Volckmann in Wiedemanns Annalen Bd. 16, S. 481 bis 487. Everett, S. 47 u. 48 seines Buches „Physikalische Einheiten und Konstanten". Leipzig 1888. Das Prinzip, auf dem der Aufbau von Maßsystemen beruht, wendet auf magnetische Kräfte schon Gauß an, und zwar in seinen „Res. aus d. Beob. d. magnet. Vereins 1839".

und gebräuchlich vorausgesetzten Größen dadurch ab, daß man von vornherein in die Definition der neuen Größe hineinlegt, daß sie jeder der bekannten Größen direkt oder umgekehrt proportional sein soll. Dabei ist dann zweierlei möglich, entweder die Erscheinungen gestatten, daß man den Proportionalitätsfaktor ganz fortläßt, oder sie gestatten dies nicht. Im letzteren Falle ist man genötigt, diesen Faktor auch als eine physikalische Größe aufzufassen und demgemäß ihm eine Dimension zu erteilen. Ein Beispiel wird dies verdeutlichen. Nachdem in der Elektrizitätstheorie die Stromstärke s und die elektrische Spannung d definiert sind, legt man in die Definition des elektrischen Widerstandes w den Umstand hinein, daß er bei Gleichbleiben der Stromstärke der Spannung proportional sein soll, und daß er bei gleichbleibender Spannung der Stromstärke umgekehrt proportional sein soll. Hiernach sind wir berechtigt, entweder

$$w = \frac{d}{s} = d \cdot s^{-1} \qquad \text{oder} \qquad w = f \cdot \frac{d}{s} = f \cdot d \cdot s^{-1}$$

zu setzen, wo f ein Proportionalitätsfaktor ist. Wir dürfen uns für das erste entscheiden, weil alle Erscheinungen mit der dadurch hervorgerufenen Definition des Widerstandes verträglich sind. Andererseits erkennen wir, daß der so definierte elektrische Widerstand eines Leitungsdrahtes proportional seiner Länge l

und umgekehrt proportional seinem Querschnitt q ist. Demgemäß muß richtig sein:

$$w = \frac{l}{q} = l \cdot q^{-1} \qquad \text{oder} \qquad w = f \cdot \frac{l}{q} = f \cdot l \cdot q^{-1}.$$

Hier sind wir nun aber gezwungen, die zweite Gleichung zu nehmen, weil verschiedene Stoffe trotz gleicher Länge und gleichem Querschnitt verschiedene Widerstände im Sinne von $w = d \cdot s^{-1}$ zeigen. Wir dürfen also nur

$$w = f \cdot l \cdot q^{-1}$$

setzen, und führen dadurch in dem Buchstaben f eine neue physikalische Größe ein, nämlich den spezifischen Leitungswiderstand. Dieses Beispiel wird zunächst genügen, um die Bedeutung des Proportionalitätsfaktors klarzustellen.

Wir beginnen nun mit dem Aufbau der Dimensionen der physikalischen Größen. Da Raum und Zeit apriorische Begriffe sind, so ist es natürlich, daß wir nicht Strecke l und Zeit t durch andere Größen, sondern umgekehrt die letzteren durch Strecke und Zeit auszudrücken versuchen. Als Einheit der Strecke nehmen wir das Zentimeter, als Einheit der Zeit die Sekunde, ganz dem Usus entsprechend. Aus beiden geht zunächst die Geschwindigkeit v hervor. Da noch kein Grund vorhanden ist, den Proportionalitätsfaktor nicht fortzulassen, so erhalten wir als Dimension der Geschwindigkeit:

$$v = l \cdot t^{-1}.$$

Die Untersuchung der Bewegungen mit nicht konstanter Geschwindigkeit führt uns dann weiter zum Begriff der Beschleunigung b, d. h. des in bestimmter Zeit gewonnenen Zuwachses an Geschwindigkeit. Da auch hier der Proportionalitätsfaktor fortgelassen werden darf, so ergibt sich für die Dimension der Beschleunigung:

$$b = v : t = l \cdot t^{-2} .$$

Die eingeführten Größen Strecke, Zeit, Geschwindigkeit und Beschleunigung reichen aus, um die Bewegung von Punkten zu studieren. Nun besteht aber die Welt nicht aus Punkten, sondern aus Stoff, Substanz oder Masse m. Wie haben wir nun die Masse zu messen? Wir beobachten, daß die Masse eines Körpers proportional seinem Volumen, d. h. einer Größe sein kann, deren Dimension l^3 ist. Wir können daher ansetzen:

$$m = f \cdot l^3 .$$

Hier darf aber der Proportionalitätsfaktor nicht fortgelassen werden, weil im allgemeinen nicht irgendwelche zwei Massen sich wie ihre Volumina verhalten. Der Proportionalitätsfaktor führt uns also hier zu einer neuen physikalischen Größe, der Dichtigkeit. Deshalb war die Gleichung $m = f \cdot l^3$ ungeeignet, die Dimension der Masse zu bestimmen. Wir würden nun genötigt sein, die Masse als eine dritte grundlegende Größe, wie Strecke und Zeit, betrachten zu

müssen, wenn wir keine Eigenschaft der Masse kennten, die allein von Strecke und Zeit abhinge. Eine solche Eigenschaft kennen wir aber. Denn jede Masse bewirkt Bewegungen, die auf sie zu gerichtet sind, und die unabhängig davon sind, was in Bewegung gesetzt wird. Wir wissen ferner, daß dieselbe Masse bei derselben Entfernung dessen, was bewegt wird, immer dieselbe Beschleunigung hervorruft, daß aber die letztere im umgekehrten quadratischen Verhältnis der Entfernung abnimmt. Dies berechtigt uns, die Masse sowohl proportional der von ihr verursachten Beschleunigung, als auch proportional dem Quadrate der Entfernung dessen zu setzen, was bewegt wird. Da die erwähnte Eigenschaft allen Massen in gleicher Weise zukommt, so ist kein Grund vorhanden, den Proportionalitätsfaktor nicht fortzulassen. Wir definieren also die Masse durch die Gleichung:

$$m = b \cdot r^2 = l^3 \cdot t^{-2},$$

wobei b die verursachte Beschleunigung, r die Entfernung bedeutete, in der diese Beschleunigung bewirkt wurde.

Hier nun ist die Stelle, wo das soeben aufgebaute Maßsystem von dem sogenannten absoluten Maßsystem abweicht. Bei letzterem betrachtet man die Masse als dritte grundlegende Größe, wodurch beim Ansetzen der Eigenschaft der Masse, in jeder Entfernung Beschleunigungen hervorzurufen, es nötig wird, den Proportionalitätsfaktor f beizubehalten, und ihm eine

bestimmte Dimension beizulegen. Da nämlich beim absoluten Maßsystem

$$m = f \cdot b \cdot r^2 = f \cdot l^3 t^{-2}$$

ist, so bekommt f die Dimension $m\, l^{-3} t^2$. Man hat f^{-1} Gravitationskonstante genannt. Die Inkonsequenz, die im Aufbau des absoluten Maßsystems liegt, besteht nun darin, daß man bei den Bewegungen, die durch magnetische oder elektrostatische Anziehung bewirkt werden, den Proportionalitätsfaktor fortläßt, während man ihn bei der Gravitation unnötigerweise beibehält. Dadurch kommt es, daß man das Produkt zweier magnetischer bzw. elektrischer Mengen gleich $m \cdot l^3 t^{-2}$ setzen muß, wodurch die Dimension einer magnetischen bzw. elektrischen Menge Quadratwurzel aus $m\, l^3 t^{-2}$ oder $m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1}$ werden muß.

Indem wir die gerügte Inkonsequenz nicht begehen, sondern immer, wo die Erscheinungen es gestatten, den Proportionalitätsfaktor fortlassen, erhalten wir, daß die Dimension der Masse m allein von den beiden apriorischen Größen Strecke l und Zeit t abhängt. Da wir als Einheit der Strecke das Zentimeter, als Einheit der Zeit die Sekunde eingeführt haben, so haben wir folgerichtig als Einheit der Geschwindigkeit diejenige festzusetzen, bei welcher 1 Zentimeter in 1 Sekunde zurückgelegt wird, und als Einheit der Beschleunigung diejenige, bei welcher in der Zeiteinheit eine Zunahme der Geschwindigkeit um

die Geschwindigkeitseinheit stattfindet. Demgemäß haben wir nun auch als Masseneinheit diejenige Masse zu betrachten, welche in der Entfernung von 1 Zentimeter die Einheit der Beschleunigung irgend eines bewegten Stoffes hervorruft. Hieraus folgt z. B., daß die Masse der Erde $r^2 \cdot g$ Masseneinheiten betragen muß, wo r angibt, wieviel Zentimeter ihr Radius beträgt und g angibt, wieviel Beschleunigungseinheiten die Beschleunigung des freien Falles an der Erdoberfläche beträgt.

Bisher haben wir den Begriff der Kraft noch nicht gebraucht. Derselbe wäre auch gar nicht nötig, wenn die Massenanziehung die einzige Ursache von Bewegungen wäre. Da wir aber noch andere Ursachen kennen, so haben wir den Begriff der Kraft k einzuführen. Wir legen in die Definition derselben hinein, daß sie einerseits proportional der von ihr in Bewegung gesetzten Masse, andererseits auch proportional der dieser Masse erteilten Beschleunigung sein solle. Also ist die Dimension der Kraft

$$k = m \cdot b = l^3 t^{-2} \cdot l t^{-2} = l^4 t^{-4} .$$

In der Definition der Arbeit a liegt, daß sie sowohl proportional der dabei wirksamen Kraft, wie auch proportional dem Wege ist, auf dem sie wirkt. Also ist die Dimension der Arbeit

$$a = k \cdot l = l^4 t^{-4} \cdot l = l^5 t^{-4} .$$

In der Definition des Effekts e liegt, daß derselbe sowohl direkt proportional der geleisteten Arbeit, wie auch umgekehrt proportional der dazu verbrauchten Zeit sein soll. Also ist die Dimension des Effektes

$$e = a : t = l^5 t^{-4} : t = l^5 t^{-5} .$$

Die nunmehr gewonnenen Dimensionen der mechanischen Größen stellen wir noch einmal tabellarisch zusammen, und zwar, da l immer einen positiven Exponenten, t einen negativen Exponenten bekommen hat, nicht allein mit Benutzung von l und t, sondern auch von l und v, wo l Länge, t Zeit, v Geschwindigkeit bedeutet:

Masse $m = l^3 \cdot t^{-2} = v^2 \cdot l$,

Kraft $k = l^4 \cdot t^{-4} = v^4$,

Arbeit $a = l^5 \cdot t^{-4} = v^4 \cdot l$,

Effekt $e = l^5 \cdot t^{-5} = v^5$.

So wird also die Dimension der Kraft einfach die vierte, die des Effektes die fünfte Potenz der Dimension der Geschwindigkeit v. Wenn wir nun noch zeigen, daß die Dimensionen der elektrischen Stromstärke und Spannung die zweite bzw. dritte Potenz von v werden, so wird jeder zugeben, daß der konsequente Aufbau der Dimensionen der physikalischen Größen zu äußerst einfachen und leicht zu behaltenden Symbolen führt.

Da einerseits ein Magnet, andererseits auch ein

elektrisch geladener Körper Anziehungswirkungen ausübt, die im umgekehrt quadratischen Verhältnis der Entfernung stehen, so ist von vornherein klar, daß die magnetische Menge oder Polstärke ebenso wie die elektrische Menge keine andere Dimension haben können, als die Masse, also $l^3 t^{-2}$ oder $v^2 l$.

Was die Stromstärke s nach elektromagnetischem Maße angeht, so wird sie durch die Wirkung definiert, die sie auf einen Magneten ausübt, den sie umkreist. Sie muß daher proportional der hervorgerufenen Kraft und dem Quadrat des Radius des Bogens sein, in dem sich der Strom bewegt, aber umgekehrt proportional sowohl der Länge dieses Bogens wie auch der im Zentrum tätigen magnetischen Menge. Also ist die Dimension der Stromstärke

$$s = \frac{k \cdot l^2}{l \cdot m} = \frac{v^4 \cdot l^2}{l \cdot v^2 l} = v^2 .$$

Die elektrische Spannung d setzt man proportional der in gewisser Zeit produzierten Wärmemenge, d. h. dem verursachten Effekte und umgekehrt proportional der Stromstärke. Also ergibt sich die Dimension der elektrischen Spannung

$$p = e : s = v^5 : v^2 = v^3 .$$

Für die Dimension des elektrischen Widerstandes w, den man proportional der Spannung und umgekehrt proportional der Stromstärke setzt, erhält man:

$$w = p : s = v^3 : v^2 = v\,,$$

also die Dimension der Geschwindigkeit.

Wir haben hiernach als Resultat erhalten, daß die Dimensionen des elektrischen Widerstandes, der Stromstärke, der Spannung, der Kraft und des Effektes durch die erste, zweite dritte, vierte und fünfte Potenz der Dimension der Geschwindigkeit dargestellt werden. Insbesondere erkennt man jetzt deutlich, daß mechanische und elektrische Effekte sich dadurch unterscheiden, daß v^5 bei den ersteren in v^4 mal v, (Kraft mal Geschwindigkeit) bei den letzteren in v^3 mal v^2 (Volt mal Ampere) zerlegt wird.

Es bleibt noch übrig, die Einheiten, die sich aus den soeben entwickelten Dimensionen ergeben, wenn $l = 1$ Zentimeter, $t = 1$ Sekunde gesetzt wird, mit den üblichen Einheiten zu vergleichen. Dazu ist nur nötig, zu berechnen, wieviel Gramm-Massen die Masseneinheit unseres Zentimeter-Sekunden-Systems enthält. Schon oben ist berechnet, daß die Erde $r^2 g$ Masseneinheiten enthält, wenn r ihr Radius in Zentimetern ist und wenn g angibt, wieviel Beschleunigungseinheiten die Beschleunigung des freien Falles an der Erdoberfläche beträgt. Ist also E die uns näherungsweise bekannte Zahl, welche angibt, aus wieviel Gramm-Massen die Masse der Erde besteht, so drückt $\frac{E}{r^2 g}$ aus, wieviel Gramm-Massen unsere

Masseneinheit enthält. Freilich sind die Zahlen r und g keine festen Zahlen und E kann nur näherungsweise berechnet werden. Trotzdem aber ergibt sich, daß die wahre Zahl der Gramm-Massen, die unsere Masseneinheit enthält, von 15,2 Millionen so wenig abweicht, daß die erste Dezimalstelle 2 nach 15 durchaus richtig ist. Hiernach hat man also in einer Masse, die an der Erdoberfläche 15,2 Tons[1]) wiegt, die Masseneinheit unseres Zentimeter-Sekunden-Systems zu sehen, d. h. eine solche Masse, in einem Punkte vereinigt gedacht, würde in 1 Zentimeter Entfernung eine Beschleunigung von 1 Zentimeter pro Sekunde hervorrufen.

Um nun auch die Krafteinheit numerisch in Gramm auszudrücken, beachten wir, daß sie imstande sein soll, der Masseneinheit die Beschleunigungseinheit zu erteilen. Wir wissen aber, daß die Kraft, die wir an der Erdoberfläche 1 Gramm nennen, der Masse, die in 1 Gramm steckt, die Beschleunigung von g Zentimetern erteilt. Um also der Masse, die in der Masseneinheit (gleich $15{,}2 \cdot 10^6$ Gramm) steckt, die Beschleunigungseinheit zu erteilen, ist eine Kraft von $(15{,}2 \cdot 10^6 : g)$ Gramm erforderlich. Dies ergibt $15{,}5 \cdot 10^3$ Gramm. Wir haben also in 15,5 Kilogramm oder 31 Pfund die Krafteinheit im Zentimeter-

[1]) Diese Zahl erwähnt auch Volckmann in dem zitierten Aufsatze (Wiedemanns Annalen, Bd. 16, S. 484).

Sekunden-System zu sehen. Demnach müßte also durch zwei in je einem Punkte konzentriert gedachte Massen von je 15,2 Tons eine Kraft von 15,5 Kilogramm erzeugt werden, falls die beiden Punkte 1 Zentimeter Entfernung haben.

Hieraus berechnet sich die Einheit der Arbeit zu $15{,}2 \cdot 10^6$ Erg oder 1,52 Joule, die Einheit des Effektes zu 1,52 Watts oder 0,002 Pferdekraft, die Einheit der Stromstärke zu 39 000 Ampere, die Einheit der elektrischen Spannung zu 0,000039 Volt, wobei jede Einheit im reinen Zentimeter-Sekunden-System gedacht ist. Die beiden letztgenannten Zahlen entstehen, wenn man erstens beachtet, daß hier die alten Einheiten mit $\sqrt{15{,}2 \cdot 10^6} = 3{,}9 \cdot 10^3$ zu multiplizieren sind, um die neuen Einheiten zu liefern, zweitens beachtet, daß das Ampere als der zehnte Teil der alten Stromstärkeeinheit, das Volt als das 10^8fache der alten Einheit der elektrischen Spannung festgesetzt ist.

Da die Dimensionen von fünf der wichtigsten physikalischen Größen sich als die ersten fünf Potenzen der Geschwindigkeit darstellen, so liegt es nahe, als eine der beiden Grundeinheiten die Geschwindigkeit zu wählen. Dann aber ist die Möglichkeit vorhanden, eine Einheit festzusetzen, welche, unabhängig von der Erdform und der Erdrotation, nicht allein, wie das Zentimeter und die Sekunde, international, sondern sogar universell ist, und das ist die Ge-

schwindigkeit der Wellenbewegung des Äthers, die uns, je nachdem die Länge der Wellen sehr klein oder sehr groß ist, als Geschwindigkeit des Lichtes oder der Elektrizität wahrnehmbar wird. Diesen Gedanken spricht auch Helmholtz (in Wiedemanns Ann. Bd. 17, S. 44) aus, und zwar im Zusammenhang mit kurzen Andeutungen über ein nur auf zwei Einheiten basiertes Maßsystem, das, wie er sagt, **„vielleicht in Zukunft eine wichtige Rolle spielen wird,** wenn es gelungen sein wird, genauere Bestimmungen der Gravitationskraft auszuführen." Als zweite grundlegende Größe könnte, wie Helmholtz meint, die absolute Dichtigkeit genommen werden. In der Tat hängt dieselbe nur von der Zeit ab, da ihre Dimension

$$\frac{m}{l^3} = \frac{l^3 t^{-2}}{l^3} = t^{-2}$$

wird. Als Dichtigkeitseinheit würde man, wie bisher, die Dichtigkeit des Wassers nehmen können.

Am Schlusse dieser kleinen, lediglich die Klärung der Begriffe bezweckenden Arbeit möchte der Verfasser noch einmal betonen, daß der Zweck derselben erreicht ist, wenn der Leser sich überzeugt hat, erstens, daß die gebrochenen Exponenten in den Dimensionen magnetischer und elektrischer Größen keineswegs auf Naturerscheinungen beruhen, sondern nur die Folge davon sind, daß man bei Anwendung des Newtonschen Gesetzes auf magnetische und elek-

trische Anziehungen den Proportionalitätsfaktor fortläßt, bei seiner Anwendung auf Massenanziehung aber **nicht**; zweitens, daß bei Vermeidung dieser Inkonsequenz, sich die Dimensionen der physikalischen Größen äußerst einfach gestalten, indem insbesondere die Dimensionen von Stromstärke, elektrischer Spannung, Kraft, Effekt als die zweite, dritte, vierte und fünfte Potenz der Dimension der Geschwindigkeit erscheinen.

VII. Abschnitt.

Elementare Ableitung sehr enger Grenzen für die Schwingungszeit eines mathematischen Pendels.

Bekanntlich setzt die Ableitung der genauen Formel für die Schwingungszeit t eines mathematischen Pendels von der Länge l die Kenntnis der Integralrechnung voraus. Durch dieselbe findet man bekanntlich:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \right],$$

wo g die Beschleunigung der Erdgravitation an der Erdoberfläche bedeutet und wo α den halben Ausschlagswinkel bezeichnet, d. h. den Winkel zwischen der vertikalen Ruhelage des Pendels und der Richtung, die das Pendel beim weitesten Ausschlag nach der einen oder der anderen Richtung hat. Es liegt nun nahe, die Formel

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

als Näherungsformel zu benutzen, weil für sehr kleine Winkel α die auf die Zahl eins folgenden Glieder der oben in der eckigen Klammer stehenden unendlichen Potenzreihe so klein werden, daß sie vernachlässigt werden können. Dazu kommt, daß man die Näherungsformel $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ elementar ableiten kann, ohne die Kenntnis der Integralrechnung vorauszusetzen. Meist geschieht diese Ableitung nicht direkt aus den Fallgesetzen, was doch das natürlichste ist, da die Pendelbewegung eine Bewegung ist, die, ebenso wie die Fallbewegung oder die Bewegung auf einer schiefen Ebene, allein durch die Gravitation veranlaßt wird, nur mit dem Unterschied, daß der tiefste Punkt des sich bewegenden mathematischen Pendels vom Aufhängepunkt immer dieselbe Entfernung l beibehalten muß, die Bewegung also in einem Kreisbogen, d. h. auf vorgeschriebener Bahn, erfolgen muß. Die folgende Ableitung hat nun nicht allein diesen natürlichen Ausgangspunkt, sondern hat auch vor den üblichen Ableitungen den großen Vorzug, daß sie nicht allein erkennen läßt, daß die Formel $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ eine untere Grenze der wahren Schwingungszeit ergibt, sondern auch noch eine obere Grenze

$$\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

erkennen läßt, so daß ein richtiges Urteil über die Größe des Fehlers gewonnen werden kann, den man begeht, wenn man die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels gleich $\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ setzt. Dazu kommt, daß der im folgenden beschrittene, ebenso natürliche wie elementare Ableitungsweg eine noch genauere untere Grenze finden läßt, wenn man den Satz von den statischen Momenten voraussetzen darf, ein Satz, der wohl jetzt in den oberen Klassen aller höheren Schulen gelehrt wird. Das Resultat der folgenden elementaren Ableitung ist nämlich:

$$\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) < t < \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \text{.}^{1)}$$

Die größere Genauigkeit dieser meiner Pendel-

---

[1]) Auf diese genauere Pendelformel und ihre elementare Ableitung habe ich schon 1896 in der von Dr. Potonié redigierten und von F. Dümmler (Berlin SW. 12) verlegten „Naturwissenschaftlichen Wochenschrift" (XI. Band, Nr. 7, 16. Febr. 1896) aufmerksam gemacht. Doch scheint der darauf bezügliche Artikel bei den Fachgenossen keine Beachtung gefunden zu haben.

formel gegenüber der üblichen $t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ erkennt man an dem folgenden Beispiel. Bei einem Pendel, für welches $\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ gleich eins ist, das also so lang ist, daß man es gemäß der üblichen Näherungsformel als Sekundenpendel zu bezeichnen hätte, ergibt sich für $\alpha = 5^0$, d. h. wenn die beiden weitesten Ausschlagsrichtungen einen Winkel von 10 Grad miteinander bilden:

$$1{,}00047 < t < 1{,}00095\,,$$

d. h. ein derartiges sogenanntes Sekundenpendel braucht zu einer Schwingung mehr als 1,00047 Sekunde, aber weniger als 1,00095 Sekunde. Je größer nun α wird, desto größer wird auch die gesuchte Schwingungszeit, und bei α gleich 45^0, wenn also der tiefste Punkt eines Pendels, bei dem $\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ gleich einer Sekunde ist, einen ganzen Quadranten beschreibt, ergibt sich in Sekunden:

$$1{,}0366 < t < 1{,}0824\,.$$

Um nun unsere genauere Pendelformel abzuleiten, brauchen wir von den Gesetzen der durch die Gravitation verursachten Bewegungen nur den folgende Satz, den wir als Hilfssatz bezeichneu wollen:

Hilfssatz: Wenn infolge der Gravitation ein

materieller Punkt von einem höheren Punkte P aus, den er mit der Geschwindigkeit Null verläßt, auf irgend welchen Bahnen nach einem tieferen Punkte Q gelangt, und wenn von der Verzögerung der Bewegung durch Reibung und sonstige Widerstände abgesehen werden kann, so kommt er im Punkte Q mit der Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2\,g\,h}$$

an, wo h den Höhenunterschied zwischen den Punkten P und Q bedeutet, und wo g die Beschleunigung der Gravitation bedeutet, die an der Erdoberfläche 9,8 m pro Sekunde beträgt; namentlich aber ist die im Punkte Q erlangte Geschwindigkeit ganz unabhängig von den Neigungen, welche die vom materiellen Punkte beschriebenen Bahnen gegen die Horizontalebene hatten.

Um diesen bekannten Satz zu beweisen, gehe man erstens davon aus, daß die beim vertikalen Fall in t Sekunden erlangte Geschwindigkeit v gleich $g\,t$ sein muß, weil die Geschwindigkeitszunahme pro Sekunde g betragen sollte, zweitens davon, daß, wegen des konstanten Geschwindigkeitszuwachses, der zurückgelegte Weg s derselbe sein muß, als wenn der materielle Punkt dauernd eine konstante Geschwindigkeit gehabt hätte, welche das arithmetische Mittel zwischen der anfänglichen 0 und der schließlichen v ist, d. h. $s = \frac{v}{2} \cdot t$. Hieraus und aus $v = g\,t$ folgt aber durch Elimination der Zeit t:

$$s = \frac{v^2}{2g} \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{2gs}\,.$$

Hierbei war vorausgesetzt, daß die Bahn des sich bewegenden Punktes dauernd vertikal blieb. Wenn nun aber die Bahn unter dem Winkel γ gegen die Horizontalebene geneigt ist, so ist die Beschleunigung nicht mehr g, sondern $g \sin\alpha$. Also erhalten wir in diesem Falle:

$$v = \sqrt{2g \cdot \sin\gamma \cdot s}\,.$$

Nun ist aber, da s der unter dem Winkel γ geneigte schräge Weg ist, $s \cdot \sin\gamma$ gleich dem vertikalen Höhenunterschied h des Anfangspunktes und des Endpunktes der Bahn, wodurch sich die zu beweisende Formel:

$$v = \sqrt{2gh}$$

ergibt. Daß die erlangte Geschwindigkeit unabhängig von der Richtung der Bahn, lediglich von dem Niveauunterschied h abhängt, bleibt natürlich auch richtig, wenn die Bahn sich aus unzählig vielen, undenklich kleinen Strecken zusammensetzt, die fortdauernd verschiedene Richtungen gegen die Horizontalebene haben, insbesondere also auch, wenn, wie beim tiefsten Punkt des Pendels, die Bahn ein Kreisbogen ist.

Die folgende Figur verdeutliche nun die Schwingung der Pendellänge $OA = l$ über die vertikale Lage OE hinaus bis OB, so daß $\sphericalangle AOE = \sphericalangle EOB$,

dem halben Ausschlagswinkel α ist. OE schneide AB in C. Ist F ein beliebiger Punkt des von dem schweren Punkte beschriebenen Bogens AEB, so hat derselbe in F nach dem oben ausgesprochenen Hilfssatze dieselbe Geschwindigkeit v, wie ein Punkt in G hat, wenn er von C aus gefallen ist, weil der

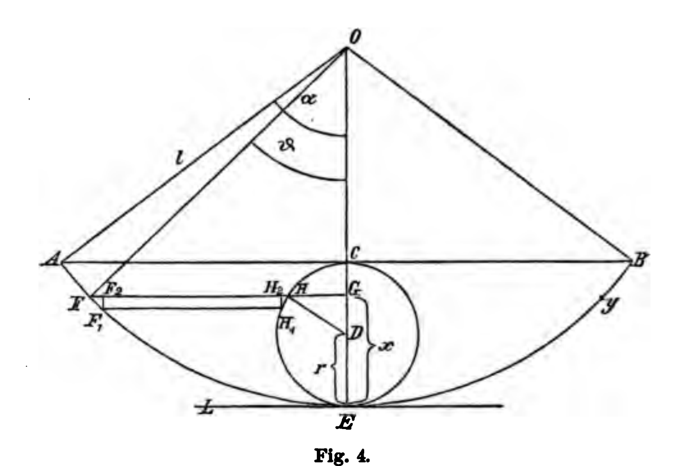


Fig. 4.

Höhenunterschied von C bis G derselbe ist, wie von A bis F, wo G der Schnittpunkt von CE mit der Parallelen durch F zu AC ist. Demnach ergibt sich für die Geschwindigkeit v des pendelnden Punktes in F:

$$(1) \qquad v = \sqrt{2\,g\,(2\,r - x)}\,,$$

wo $CD = DE = r$, $GE = x$ gesetzt ist. Nun ist die

Geschwindigkeit immer gleich dem Verhältnis des Weges zur Zeit, selbst wenn dieser Weg unendlich klein ist, und deshalb auch die zum Durchlaufen dieses Weges verbrauchte Zeit unendlich klein ist. Demnach ist auch:

$$v = \frac{FF_1}{\tau},$$

wenn τ die Zeit ist, die der tiefste Punkt des Pendels zum Durchlaufen des unendlich kleinen Weges verbraucht, deshalb ergibt sich für τ:

$$\tau = \frac{FF_1}{v} = \frac{FF_1}{\sqrt{2g(2r - x)}}. \tag{2}$$

Man ziehe nun F_1F_2 senkrecht zu FG. Dann erhält man ein unendlich kleines Dreieck FF_1F_2. Dieses unendlich kleine Dreieck stimmt nun mit dem Dreieck FOG in einem rechten Winkel und dem Winkel F_1FF_2 überein, der gleich dem Winkel FOG ist, weil seine Schenkel auf dessen Schenkeln senkrecht stehen. Beide Dreiecke sind also ähnlich, so daß daraus die Proportion:

$$FF_1 : F_1F_2 = l : FG$$

hervorgeht. FG läßt sich nun aber nach dem Sehnensatze leicht durch die Abschnitte x und $2l - x$ des auf FG senkrechten Durchmessers ausdrücken, nämlich:

$$FG = \sqrt{x(2l - x)}.$$

Also ist:

$$FF_1 : F_1F_2 = l : \sqrt{x(2l - x)}\,. \tag{3}$$

Andererseits ziehe man durch F_1 die Parallele zu FG, die den um D mit r gezogenen Kreis in H_1 trifft, während FG diesen Kreis in H schneidet; ferner ziehe man H_1H_2 senkrecht zu FG. Dann erhält man ein zweites unendlich kleines rechtwinkliges Dreieck HH_1H_2. Dieses unendlich kleine Dreieck ist nun HDG ähnlich, weil es mit ihm in einem rechten Winkel und dem Winkel H_1HH_2 übereinstimmt, der gleich dem Winkel HDG ist. Aus dieser Ähnlichkeit folgt:

$$H_1H_2 : HH_1 = HG : r\,.$$

Nun läßt sich aber HG wiederum nach dem Sehnensatze durch die Abschnitte CG und GE des Durchmessers CE ausdrücken, nämlich

$$HG = \sqrt{x(2r - x)}\,.$$

Also erhält man:

$$H_1H_2 : HH_1 = \sqrt{x(2r - x)} : r\,. \tag{4}$$

Wenn man nun die Proportionen (3) und (4) miteinander multipliziert und dabei beachtet, daß $H_1H_2 = F_1F_2$ ist, so erhält man:

$$FF_1 : HH_1 = l\sqrt{2r - x} : r\sqrt{2l - x}$$

oder:

$$FF_1 = HH_1 \cdot \frac{l\sqrt{2r - x}}{r\sqrt{2l - x}}\,. \tag{5}$$

Setzt man nun den Ausdruck, der in (5) gleich FF_1 gesetzt ist, in (2) ein, so erhält man:

$$\tau = \frac{HH_1 \cdot l}{r\sqrt{2g}\,\sqrt{2l - x}}. \tag{6}$$

Nun ist nach der Figur $x = l - l\cos\vartheta$, wo mit ϑ der Winkel FOE bezeichnet ist. Also ist:

$$\sqrt{2l - x} = \sqrt{l + l\cos\vartheta} = \sqrt{l \cdot 2\cos^2\frac{\vartheta}{2}}$$

$$= \cos\frac{\vartheta}{2} \cdot \sqrt{2l}.$$

Setzen wir dies in (6) ein, so erhalten wir:

$$\tau = \frac{HH_1 \cdot l}{r\sqrt{2g} \cdot \cos\frac{\vartheta}{2} \cdot \sqrt{2l}} = \frac{HH_1 \cdot \sqrt{l}}{2r\cos\frac{\vartheta}{2} \cdot \sqrt{g}} \tag{7}$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{HH_1}{2r\cos\frac{\vartheta}{2}}.$$

Bewegt sich nun der pendelnde Punkt von A über E nach B, so bewegt sich zugleich der Punkt H über E nach C, beschreibt also die Peripherie des um D mit r beschriebenen Kreises die gleich $2r\pi$ ist. Wir erhalten also für die gesuchte Schwingungszeit:

$$t = \sum \tau = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \sum \frac{HH_1}{2r\cos\frac{\vartheta}{2}}. \tag{8}$$

In dieser völlig genauen Gleichung für die gesuchte Schwingungszeit t, sind l, g, r konstante Größen, und nur HH_1 und ϑ sind veränderlich. Wäre ϑ konstant, so könnte man die Summierung sehr leicht vollziehen, da $\Sigma HH_1 = 2 r \pi$ ist. Der veränderliche Winkel ϑ ist nun aber mindestens null, höchstens α. Setzen wir 0 ein, so daß $\cos\frac{\vartheta}{2} = 1$ wird, so erhalten wir, da dann der Nenner des Bruches seinen größten Wert hat, eine untere Grenze für t. Setzen wir aber $\vartheta = \alpha$, so erhalten wir eine obere Grenze für t. Beide Male reduziert sich:

$$\sum \frac{HH_1}{2r} \quad \text{auf} \quad \frac{2 r \pi}{2 r} = \pi .$$

Unser erstes Resultat lautet also:

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}} < t < \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} . \tag{9}$$

Durch die Ungleichung (9) ist nicht allein die übliche Pendelformel elementar aus unserem Hilfssatze abgeleitet, sondern es ist auch eine obere Grenze für die Schwingungszeit gefunden, indem gezeigt ist, daß, während $\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ kleiner ist als die wahre Schwingungsdauer, man eine Zeit erhält, die größer ist als die wahre Schwingungsdauer, wenn man die untere

Grenze $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ durch $\cos\frac{\alpha}{2}$ dividiert, wo $\frac{\alpha}{2}$ den vierten Teil des ganzen Schwingungsbogens bedeutet.

Um aus der obigen Erörterung eine noch bessere untere Grenze als $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ abzuleiten, gehen wir von dem auf der rechten Seite der Formel (6) erkennbaren Faktor:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2\,l}}}$$

aus. Wenn wir hier unter der Wurzel den positiven Bruch $\frac{x^2}{16\,l^2}$ addieren, so wird der Wert der Wurzel vergrößert, also der Bruch verkleinert. Da nun $1-\frac{x}{2\,l}+\frac{x^2}{16\,l^2}$ das Quadrat von $1-\frac{x}{4\,l}$ ist, so muß sein:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2\,l}}} > \frac{1}{1-\frac{x}{4\,l}} = \frac{1+\frac{x}{4\,l}}{1-\frac{x^2}{16\,l^2}},$$

welcher Bruch verkleinert wird, wenn sein Nenner um $\frac{x^2}{16\,l^2}$ vergrößert wird. Also ist um so mehr:

$$(10)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2l}}} > 1 + \frac{x}{4l}.$$

Wegen der soeben abgeleiteten Ungleichung (10) folgt nun aus (6):

$$(11)\qquad \tau > \sqrt{\frac{l}{g}}\left[\sum \frac{HH_1}{2r} + \sum \frac{HH_1 \cdot x}{2r \cdot 4l}\right].$$

Nun ist HH_1 die Länge eines unendlich kleinen Bogens, x sein Abstand von der Tangente, die in E gelegt werden kann. Also ist bezüglich dieser Tangente

$$\Sigma HH_1 \cdot x$$

die Summe der statischen Momente der unzählig vielen unendlich kleinen Teile des Kreises um D mit r als Radius. Da diese Summe nach dem Satz von den statischen Momenten gleich dem Moment des Schwerpunkts ist, d. h. gleich dem Produkte der ganzen Peripherie dieses Kreises mit dem Lote, gefällt von D auf die Tangente in E, so erhalten wir:

$$(12)\qquad \Sigma HH_1 \cdot x = 2r\pi \cdot r = 2r^2\pi.$$

Da andererseits $\Sigma HH_1 = 2r\pi$ ist, so erhalten wir nun aus (11):

$$(13)\qquad \tau > \sqrt{\frac{l}{g}}\left[\frac{2r\pi}{2r} + \frac{2r^2\pi}{2r \cdot 4l}\right]$$

oder:

$$(14)\qquad \tau > \sqrt{\frac{l}{g}}\left[\pi + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{r}{l}\right] = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{r}{4l}\right].$$

Nun ist aber $r = \frac{1}{2}(l - l\cos\alpha) = l\sin^2\frac{\alpha}{2}$, also $\frac{r}{4l} = \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Setzen wir dies in (14) ein, so erhalten wir:

$$t > \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right].$$

Wenn wir nun noch diese verbesserte untere Grenze mit der oben gefundenen oberen Grenze zu einer einzigen Ungleichung vereinigen, erhalten wir schließlich:

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right] < t < \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}. \tag{15}$$

VIII. Abschnitt.

Die Konstantenzahl eines Polyeders und der Eulersche Lehrsatz.[1]

Die Konstantenzahl eines beliebigen Polyeders, d. h. die Zahl der einfachen Bedingungen, welche dasselbe bestimmen, läßt sich auf zwei verschiedenen Wegen sehr leicht bestimmen; und die Gleichsetzung der auf beiden Wegen erhaltenen Resultate ergibt den Eulerschen Satz.

Das Polyeder habe k Kanten, e Ecken, f Flächen, und die Konstantenzahl c. Jede der f Flächen denke man sich auf irgend eine Weise in Dreiecke zerlegt, was bekanntlich bei einem i-Seit durch $i-3$ Diagonalen geschieht. Die Gesamtzahl aller so zur Zerlegung der f Flächen verwandten Diagonalen sei d. Diese Zahl d läßt sich leicht ableiten. Etwa so. In jeder Fläche ist die Zahl der entstandenen Dreiecke um 1 größer, als die Zahl der gezogenen Diagonalen.

---

[1]) Den Inhalt dieser im Stereometrieunterricht verwendbaren Betrachtung gab ich schon 1878 in der Grunert-Hoppeschen Zeitschrift.

Also sind $d + f$ Dreiecke entstanden. Diese haben zusammen $3(d + f)$ Seiten. Dies sind aber die k Kanten uud die d Diagonalen, jedoch jede Kante und jede Diagonale doppelt gerechnet. Folglich hat man

$$3(d + f) = 2(k + d), \quad \text{oder}$$

$$d = 2k - 3f. \tag{1}$$

Erste Ableitung der Konstantenzahl c.

Hätte das Polyeder nur Dreiecke zu Flächen, so wäre es in Maß und Lage gerade vollkommen bestimmt, wenn seine e Eckpunkte gegeben wären. Daß aber ein Eckpunkt gegeben, d. h. einer der ∞^3 Punkte des Raumes sein soll, ist eine dreifache Bedingung. Folglich wäre die Konstantenzahl eines nur aus Dreiecken bestehenden Polyeders gleich $3e$. Denkt man sich nun bei einem beliebigen Polyeder die oben erwähnten d Flächendiagonalen gezogen, so sieht man, daß das beliebige Polyeder als ein nur aus Dreiecken zusammengesetztes Polyeder aufgefaßt werden kann, bei welchem an jeder von d Kanten zwei Flächen zusammenstoßen, die einen Neigungswinkel von zwei Rechten bilden. Jeder dieser d Winkel von bestimmter Größe vermindert also die Konstantenzahl $3e$ um 1. Also ist:

$$c = 3e - d \text{ [1]}. \tag{2}$$

[1]) Die Ausdehnung der Ableitung der Konstantenzahl eines Polyeders auf entsprechende Gebilde im n-dimensionalen linearen Raum gab ich gelegentlich der Mathematikerversammlung in Hamburg (1901). Vergleiche Jahresbericht der „Deutschen Mathematiker-Vereinigung“.

Zweite Ableitung der Konstantenzahl c.

Man stelle sich zunächst wieder ein Polyeder vor, das aus lauter Dreiecken besteht. Dann denke man sich irgend eine Ecke mit den von ihr auslaufenden Kanten und Flächen fort. Wenn diese Ecke A i-kantig ist, so besitzt das restierende Gebilde noch $k - i$ Kanten, $f - i$ Flächen und $e - i - 1$ eigentliche Ecken. Dazu kommen i unvollständige Ecken, nämlich die zweiten Endpunkte $B_1, B_2, B_3, \ldots B_i$ der i von A ausgehenden Kanten. Wenn nun die Längen der $k - i$ Kanten gegeben sind, so ist jedes der $f - i$ Dreiecke, also auch seine drei Winkel, vollkommen bestimmt. Folglich sind dadurch an jeder Ecke alle Winkel zwischen den Kanten gegeben. Es seien nun noch die Flächenneigungswinkel an jeder Kante gegeben, außer an den i abgeschnittenen Kanten und den i Kanten, welche die Punkte $B_1, B_2, B_3, \ldots B_i$ der Reihe nach verbinden. Dadurch sind dann an jeder der $e - i - 1$ eigentlichen Ecken alle Kantenwinkel und alle Flächenneigungswinkel, also für jede Ecke drei Größen zuviel gegeben. Folglich ist die Konstantenzahl jenes restierenden Gebildes gleich

$$(k - i) + (k - 2i) - 3(e - i - 1),$$

oder

$$2k - 3e + 3.$$

Um aus diesem Gebilde das vollständige Polyeder herzustellen, hat man noch die ausgestoßene Ecke zu konstruieren, was durch drei gegebene Größen, z. B.

drei Kantenlängen möglich ist. Wir erhalten also als Konstantenzahl eines nur aus Dreiecken bestehenden Polyeders:

$$2k - 3e + 6.$$

Ein beliebiges Polyeder betrachten wir nun, wie oben, als ein aus Dreiecken bestehendes Polyeder, bei welchem d Flächenneigungswinkel gleich zwei Rechten sind. Wir haben daher zur Bestimmung von c in dem eben gefundenen Ausdruck k durch $k + d$ zu ersetzen, und dann d zu subtrahieren. Nun aber haben wir das Polyeder nur hinsichtlich seiner Maße konstruiert, aber noch keine Bestimmung über seine Lage getroffen. Seine Lage ist bestimmt, sobald man die Ebene feststellt, in welcher eine Fläche liegen soll, und von dieser Fläche eine Ecke und die Lage einer sie enthaltenden Seite gibt, d. h. indem man eine von den ∞^3 Ebenen des Raumes, dann einen von den ∞^2 Punkten dieser Ebene, und endlich einen von den ∞^1 Strahlen auswählt, welche durch diesen Punkt in dieser Ebene gehen. Also besteht die Feststellung der Lage in einer $(3 + 2 + 1)$ fachen Bedingung. Folglich hat man schließlich:

$$c = 2(k + d) - 3e + 6 - d + 6, \quad \text{oder}$$

$$c = 2k - 3e + d + 12. \tag{3}$$

Addiert man nun die beiden in den Formeln (2) und (3) gewonnenen Werte von c, so erhält man das einfache Resultat:

$$c = k + 6. \tag{4}$$

Jedes Polyeder, dessen Ecken und Flächen allgemein sind, ist also, abgesehen von seiner Lage, durch genau so viele einfache Bedingungen bestimmt, wie die Zahl seiner Kanten beträgt.[1])

Setzt man die in (2) und (4) erhaltenen Werte von c einander gleich, und führt für d den in (1) gewonnenen Wert ein, so hat man einen neuen Beweis des Eulerschen Satzes:

$$f + e = k + 2. \tag{5}$$

---

[1]) Vergleiche in der Hoppeschen Zeitschrift die Abhandlung von R. Hoppe (LV. N. XVIII. S. 217), wo umgekehrt c aus Gl. (5) berechnet ist.

IX. Abschnitt.

Einführung in die neuere Geometrie.

§ 1. Doppelverhältnis von vier Punkten einer geraden Punktreihe.

Wer den Schüler, der die elementare Planimetrie beherrscht, schnell und sicher in die Grundlagen der projektiven Geometrie einführen will, ohne ihn aus den ihm gewohnten Gedankenkreisen gar zu sehr herauszureißen, sollte von der Erhaltung des Doppelverhältnisses bei der Projektion gerader Punktreihen ausgehen.

Wenn auf zwei geraden Linien die Punkte A und A' liegen, so heißt A' Projektion des Punktes A bezüglich des Projektionszentrums O, wenn O, A, A' in gerader Linie liegen. Die gerade Punktreihe g, d. h. die Gesamtheit aller auf der geraden Linie g liegenden Punkte, heißt bezüglich des Projektionszentrums O perspektiv zu einer zweiten geraden Punktreihe g', wenn jeder Punkt auf g' Projektion eines Punktes auf g ist. Wenn zwei bezüglich O perspektive gerade Punktreihen g und g' parallel sind und A,

B, C drei Punkte auf g, A', B', C' ihre Projektionen auf g' sind, so ist das Verhältnis, in welchem die Strecke zwischen zwei Punkten auf g durch den dritten Punkt geteilt wird, gleich dem Verhältnis, in welchem die entsprechende Strecke auf g' durch den entsprechenden dritten Punkt geteilt wird, wie in der elementaren Planimetrie bewiesen wird, oder:

$$\frac{BA}{BC} = \frac{B'A'}{B'C'}. \tag{1}$$

Hier ist links AC als Strecke, B als Teilpunkt gedacht. Der Deutlichkeit wegen soll bei einem Teilungsverhältnis immer der Teilpunkt im Zähler und Nenner vorangeschrieben werden, während die Endpunkte der geteilten Strecke, hier A, C, nachfolgen. Dabei ist es gleichgültig, ob der Teilpunkt zwischen den Endpunkten der Strecke oder auf deren Verlängerung gedacht ist. Doch wollen wir im ersten Falle das Teilungsverhältnis negativ, im zweiten positiv nennen. Aus der oben angegebenen Gleichsetzung der beiden auf die parallelen Geraden g und g' bezüglichen Teilungsverhältnisse, folgt noch:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \quad \text{oder} \quad \frac{CA}{CB} = \frac{C'A'}{C'B'}.$$

Soeben war vorausgesetzt, daß die durch O einander perspektiven geraden Punktreihen g und g' auf parallelen Geraden liegen. Wenn nun g und g' nicht parallel, aber doch perspektiv sind, so be-

steht nicht, wie soeben, eine Beziehung zwischen drei Punkten auf g und den ihnen perspektiven Punkten auf g', sondern zwischen vier Punkten auf g und vieren auf g', indem nicht mehr zwischen einem einzigen Teilungsverhältnis auf g und einem einzigen auf g' eine Gleichung besteht, sondern zwischen zwei Teilungsverhältnissen auf g und den beiden entsprechenden auf g' eine Beziehung stattfindet. Wenn nämlich A, B, C, D vier beliebige Punkte auf g sind und A', B', C', D' die ihnen durch O perspektiven auf g', so besteht die Gleichung:

$$(2) \qquad \frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC} = \frac{B'A'}{B'C'} : \frac{D'A'}{D'C'} .$$

Das hier links vom Gleichheitszeichen stehende Verhältnis der beiden Teilungsverhältnisse, in welchen AC durch die Punkte B und D geteilt wird, nennt man Doppelverhältnis der vier Punkte A, B, C, D. Die Beziehung (1) spricht also aus, daß ein auf die vier Punkte A, B, C, D bezügliches Doppelverhältnis gleich dem entsprechenden Doppelverhältnis der vier Punkte A', B', C', D' ist, die ihnen durch O perspektiv entsprechen. Hierfür sagt man kürzer, daß durch Projektion einer geraden Punktreihe auf eine andere jedes Doppelverhältnis erhalten bleibt. Durch Umformungen der beiden Seiten der Gleichung (1), die ja eine Proportion zwischen vier Verhältnissen darstellt, erhält man noch manche andere Proportionen, z. B.:

$$\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} = \frac{A'B'}{A'D'} : \frac{C'B'}{C'D'}$$

oder:

$$\frac{AB}{AC} : \frac{DB}{DC} = \frac{A'B'}{A'C'} : \frac{D'B'}{D'C'} .$$

Überhaupt kann man irgend welche von den sechs Strecken, die die vier Punkte A, B, C, D miteinander bilden, herausnehmen und das Verhältnis der Teilungsverhältnisse bilden, in denen diese Strecke durch die beiden Punkte geteilt wird, die nicht die Endpunkte der Strecke sind. Dann hat man ein Doppelverhältnis erhalten, das gleich demjenigen auf g' bezüglichen Doppelverhältnis zu setzen ist, das von den entsprechenden, hier durch Strichelung erkennbaren Strecken gebildet wird. Da es demnach gar nicht darauf ankommt, welche zwei Punkte als Streckenendpunkte und welche als zugehörige Teilungspunkte gedacht werden, so kann man für ein Doppelverhältnis der vier Punkte A, B, C, D auch kurz schreiben:

$$(ABCD)$$

und hat dann nur darauf zu achten, daß in einem dem Symbol $(ABCD)$ gleichgesetzten Symbol die Strecken und die Teilpunkte in derselben Reihenfolge geschrieben werden. So entsteht aus (2):

$$(ABCD) = (A'B'C'D') ,$$

indem gedacht ist, daß die Strecke AC erst durch B, dann durch D geteilt ist.

Um die in (2) ausgesprochene Erhaltung des Doppelverhältnisses bei perspektiver Lage zu beweisen, ziehe man durch A die Parallele zu der

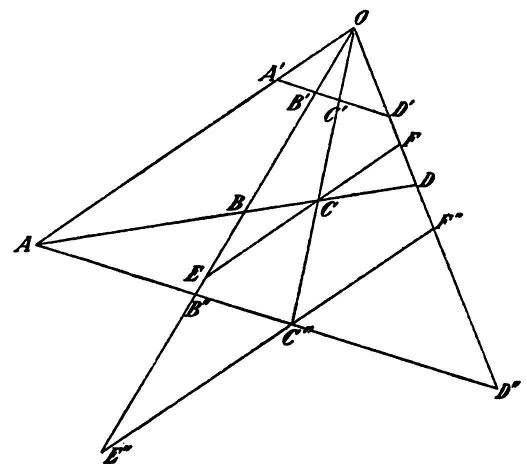


Fig. 5.

Geraden g', auf der A', B', C', D' liegen. Diese Parallele schneidet $OB'B$ in B'', $OC'C$ in C'', $OD'D$ in D''. Dann ist nach (1) (vgl. Fig. 5):

$$\frac{B'A'}{B'C'} : \frac{D'A'}{D'C'} = \frac{B''A}{B''C''} : \frac{D''A}{D''C''}. \tag{3}$$

Zieht man nun noch durch C die Parallele zu OA, die OBB'' in E und OD'' in F schneidet, sowie

durch C'' die Parallele zu OA, die OBB'' in E'' und ODD'' in F'' schneidet, so erhält man nach dem Proportionallehrsatz:

$$\frac{BA}{BC} = \frac{OA}{CE} \quad \text{und} \quad \frac{DA}{DC} = \frac{OA}{CF},$$

woraus durch Division folgt, daß das Doppelverhältnis

$$(4) \qquad \frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC} = \frac{CF}{CE}$$

ist. Ebenso erhält man:

$$(5) \qquad \frac{B''A}{B''C''} : \frac{D''A}{D''C''} = \frac{C''F''}{C''E''}.$$

Nun sind nach den Proportionallehrsätzen die rechten Seiten von (4) und (5) einander gleich, also auch die linken Seiten. Nun hat man nur noch das in (5) stehende Doppelverhältnis gemäß (3) durch

$$\frac{B'A'}{B'C'} : \frac{D'A'}{D'C'}$$

zu ersetzen, um die Behauptung

$$(ABCD) = (A'B'C'D')$$

zu erhalten.

Da es immer nur einen Punkt gibt, der eine Strecke nach einem, auch dem Vorzeichen nach vorgeschriebenen Verhältnis teilt, so kann ein Doppelverhältnis nur dann gleich $+1$ sein, wenn die Teilpunkte, hier B und D, zusammenfallen. Wenn aber eine Strecke AC durch den zwischen A und C

liegenden Punkt B nach demselben Verhältnis geteilt wird, wie durch den auf der Verlängerung von AC liegenden Punkt D, so ist das Doppelverhältnis:

$$\frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC} = -1 .$$

Man nennt die vier Punkte dann **harmonische**, und die beiden Punkte A und C ebenso wie B und

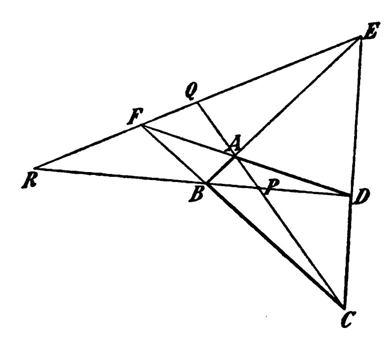


Fig. 6.

D **konjugiert-harmonisch** oder auch schlechthin konjugiert. Man nennt wohl auch A und C durch B und D harmonisch **getrennt**. Ebenso trennen A und C die Punkte B und D harmonisch.

Die Fruchtbarkeit des Satzes von der Erhaltung des Doppelverhältnisses beim Projizieren der Punkte einer geraden Linie auf eine andere gerade Linie von einem Projektionszentrum O aus, erkennt man am

besten an der Einfachheit, mit welcher sich mit Hilfe dieses Satzes der folgende wichtige Satz beweisen läßt.

Jede Diagonale eines vollständigen Vierseits wird durch die beiden anderen harmonisch geteilt. (Vgl. Fig. 6.)

Ein vollständiges Vierseit ist nämlich die Gesamtheit von vier Strahlen und ihren sechs Schnittpunkten, es entsteht also aus einem Viereck $ABCD$, indem man die Gegenseiten AB und CD sich in einem Punkte E und die Gegenseiten AD und BC sich in einem Punkte F schneiden läßt. Die noch außerdem möglichen drei Verbindungslinien AC, BD, EF sind die drei Diagonalen des vollständigen Vierseits. AC und BD mögen sich in P, AC und EF in Q, BD und EF in R schneiden. Dann spricht der zu beweisende Satz aus, daß AC durch P und Q, BD durch P und R, EF durch Q und R harmonisch, d. h. nach demselben Verhältnis geteilt wird. Um zu beweisen, daß C, P, A, Q harmonische Punkte sind, haben wir nur von E aus die vier Punkte C, P, A, Q auf die Diagonale DB zu projizieren. Dadurch wird:

$$(CPAQ) = (DPBR).$$

Wenn wir nun von F aus die erhaltenen vier Punkte D, P, B, R auf AC zurückprojizieren, so erhalten wir zweitens

$$(DPBR) = (APCQ).$$

Aus beiden Gleichsetzungen von Doppelverhältnissen folgt nun:

$$(CPAQ) = (APCQ)$$

oder, ausführlich geschrieben:

$$\frac{PC}{PA} : \frac{QC}{QA} = \frac{PA}{PC} : \frac{QA}{QC}$$

oder:

$$\left(\frac{PC}{PA}\right)^2 : \left(\frac{QC}{QA}\right)^2 = 1 .$$

Da nun $\frac{PC}{PA} : \frac{QC}{QA}$ nicht gleich $+1$ sein kann, weil sonst P und Q zusammenfallen müßten, so folgt aus unserer Gleichung:

$$\frac{PC}{PA} : \frac{QC}{QA} = -1 ,$$

d. h. nach dem Obigen: AC wird durch P und Q harmonisch geteilt. Genau so kann man durch zweimaliges Projizieren den Beweis auch für jede der beiden anderen Diagonalen führen.

§ 2. Projektive Punktreihen und Strahlbüschel, der Pascalsche Satz.

In § 1 sind zwei gerade Punktreihen perspektiv genannt, wenn immer zwei entsprechende Punkte, wie A und A', mit einem und demselben Punkte O in gerader Linie liegen, oder, wie wir auch sagten, wenn

A' Projektion des Punktes A von O aus ist. Man überträgt nun den Ausdruck perspektiv auch auf Strahlbüschel, indem man den Strahlbüschel, dessen Scheitel O ist, zu der geraden Punktreihe g perspektiv nennt, wenn einem Strahl durch O der Punkt auf g entspricht, in welchem er g schneidet. Zwei Strahlbüschel nennt man perspektiv, wenn sie einer und derselben geraden Punktreihe perspektiv sind, d. h. wenn entsprechende Strahlen der beiden Strahlbüschel sich in Punkten einer geraden Punktreihe schneiden. Auch bei Strahlbüscheln kann man vom Doppelverhältnis und der Erhaltung desselben bei perspektiver Lage sprechen, nur daß man statt der Entfernungen zweier Punkte den Sinus des Winkels zwischen den entsprechenden Strahlen setzen muß. Um zu zeigen, daß ein auf vier Punkte bezügliches Doppelverhältnis gleich dem Doppelverhältnis ist, das sich auf vier ihnen perspektive Strahlen bezieht, hat man aus der elementaren Planimetrie und Trigonometrie nur zwei Sätze anzuwenden, erstens den Satz, daß, wenn zwei Dreiecke dieselbe Höhe haben, ihre Inhalte sich verhalten wie die Seiten, auf denen die Höhe senkrecht steht, zweitens den Satz, daß die Inhalte zweier Dreiecke sich verhalten wie die Produkte aus je zwei Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels. Mit Hilfe dieser beiden Sätze erhält man nämlich:

$$\frac{BA}{BC} = \frac{OBA}{OBC} = \frac{OB \cdot OA \cdot \sin BOA}{OB \cdot OC \cdot \sin BOC}$$

und: $$\frac{DA}{DC} = \frac{ODA}{ODC} = \frac{OD \cdot OA \cdot \sin DOA}{OD \cdot OC \cdot \sin DOC},$$

woraus durch Division folgt:

$$\frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC} = \frac{\sin BOA}{\sin BOC} : \frac{\sin DOA}{\sin DOC}.$$

Hieraus folgt für den Fall, daß zwei Strahlbüschel mit den Scheiteln O und O' perspektiv, d. h. einer und derselben Punktreihe perspektiv sind:

$$\frac{\sin BOA}{\sin BOC} : \frac{\sin DOA}{\sin DOC} = \frac{\sin BO'A}{\sin BO'C} : \frac{\sin DO'A}{\sin DO'C}.$$

Insbesondere entstehen bei einem Kreise zwei projektive Strahlbüschel mit den Scheiteln O und O', wenn man jeden von zwei Punkten O und O' der Peripherie mit jedem beliebigen Punkte der Peripherie verbindet. Denn wenn A und B zwei solche Punkte sind, so ist Winkel AOB mit Winkel $AO'B$ entweder gleich oder supplementar, wie aus dem Peripheriewinkelsatz der elementaren Kreislehre folgt, so daß

$$\sin AOB = \sin AO'B.$$

Wenn nun zwei gerade Punktreihen oder zwei Strahlbüschel zwar nicht notwendig perspektiv sind, aber doch gleiches Doppelverhältnis bei irgend welchen vier von den Punkten bzw. von den Strahlen zeigen, so nennt man sie projektiv. Wenn zwei Strahlbüschel nicht perspektiv, wohl aber projektiv sind, so läßt sich immer ein dritter vermittelnder Strahl-

büschel finden, dem beide Strahlbüschel perspektiv sind. Wenn z. B. fünf Punkte gegeben sind (Fig. 7) und man wählt zwei von ihnen O und O' als Scheitel von projektiven Strahlbüscheln, während man einen dritten Punkt A mit den beiden andern B und C' verbindet, und OC' mit AB sich in C, $O'B$ mit AC' sich in B' schneiden läßt, so sind die drei Punkte

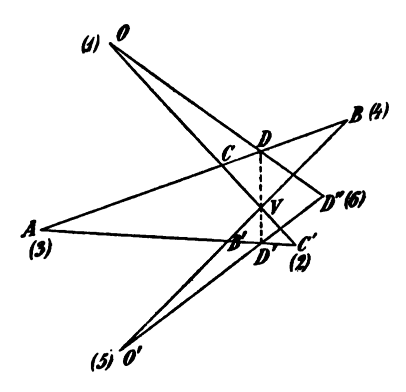


Fig. 7.

A, C, B mit den drei Strahlen OA, OC, OB perspektiv und die drei Punkte A, B', C' mit den drei Strahlen $O'A$, $O'B'$, $O'C'$ perspektiv. Folglich muß der Schnittpunkt V von OC' mit $O'B$ Scheitel eines Strahlbüschels werden, dem sowohl der Strahlbüschel mit dem Scheitel O, als auch der Strahlbüschel mit dem Scheitel O' perspektiv ist. Man kann daher

bloß mit dem Lineal zu jedem vierten Strahle durch O den entsprechenden vierten Strahl durch O' finden; man hat nämlich nur den Schnittpunkt D des vierten Strahls mit der geraden Linie ABC mit V zu verbinden und den Schnittpunkt D' von VD mit $AB'C'$ mit O' zu verbinden. Dann ist $O'D'$ der OD entsprechende Strahl. So kann man unzählig viele Paare entsprechender Strahlen in den beiden Strahlbüscheln mit den Scheiteln O und O' finden. Wenn man dann immer die Schnittpunkte D'' von je zwei so gefundenen Strahlen OD und $O'D'$ aufsucht, so erhält man eine kontinuierliche Reihe von Punkten, die man Kurve zweiten Grades nennt. Einer so durch die fünf Punkte O, O', A, B, C erzeugten Kurve zweiten Grades gehören diese fünf Punkte auch selbst an. Denn A, B, C' sind die Schnittpunkte der Paare entsprechender Strahlen OA und $O'A$, OB und $O'B'$, OC und $O'C'$, während dem Strahle OO', als Strahl von O aufgefaßt, irgend ein Strahl durch O' entspricht, der ihn also in O' schneidet, und dem Strahle OO', als Strahl von O' aufgefaßt, ein Strahl durch O entspricht, der also OO' in O schneidet. Aus fünf Punkten einer Kurve zweiten Grades kann man also unzählig viele sechste Punkte, bloß mit Anwendung des Lineals konstruieren. Ist D'' ein solcher sechster Punkt, so müssen drei Punkte, nämlich D, der Schnittpunkt von OD'' mit AB, zweitens D', der Schnittpunkt von $O'D''$ mit AC' und

drittens V, der Schnittpunkt von OC' mit $O'B$, in gerader Linie liegen. Sechs Punkte einer Kurve zweiten Grades haben also die Eigenschaft, daß durch Verbindung von sechsmal je zweien dieser Punkte und Aufsuchen des Schnittpunktes von immer zweien der Verbindungsstrecken drei Schnittpunkte entstehen, die in gerader Linie liegen müssen. Um dies deutlicher zu machen, bezeichnen wir die sechs Punkte O, O', A, B, C', D'' mit den Nummern 1, 2, 3, 4, 5, 6, und zwar

O mit 1, C' mit 2, A mit 3, B mit 4,
O' mit 5, D'' mit 6.

Da V, D', D wegen der Vermittelung der projektiven Beziehung durch den Strahlbüschel V in gerader Linie liegen müssen, so kann man den gefundenen Satz, den man Lehrsatz des Pascal nennt, mit Benutzung der Nummernbezeichnung so aussprechen:

Wenn man sechs Punkte, die auf einer Kurve zweiten Grades liegen, in irgend welcher Reihenfolge mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet, und dann die Verbindungsstrecken

12 mit 45, 23 mit 56, 34 mit 61

zum Schnitt bringt, so entstehen drei Schnittpunkte 7, 8, 9, die immer in gerader Linie liegen.

Da, wie oben gezeigt ist, auch die Punkte eines Kreises die Schnittpunkte entsprechender Strahlen

zweier Strahlbüschel sind, die projektiv sind, weil sie gleiches Doppelverhältnis zeigen, so gilt der soeben ausgesprochene Lehrsatz des Pascal auch für den Kreis (vgl. Fig. 8). Wenn man dieselben sechs Punkte in verschiedenen Reihenfolgen mit den Nummern

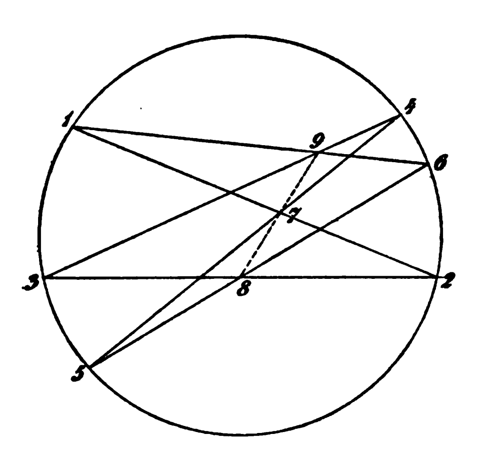


Fig. 8.

1—6 bezeichnet, so erhält man auch verschiedene Schnittpunkte 7, 8, 9. Nur wenn die Bezeichnung dieselbe Reihenfolge beibehält, wie

1 2 3 4 5 6 und 3 4 5 6 1 2

oder genau umgekehrt ist, wie

4 5 6 1 2 3 und 3 2 1 6 5 4,

erhält man dieselben Punkte 7, 8, 9. Es gibt demnach, wie die Permutationslehre ergibt,

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{6 \cdot 2} = 60$$

Pascalsche Gerade, d. h. gerade Linien, die so entstehen, wie oben die Gerade entstand, auf der die Punkte 7, 8, 9 liegen.

§ 3. Pol und Polare bezüglich eines Kreises.

Zieht man (Fig. 9) von einem Punkte P außerhalb eines Kreises zwei Sekanten PAB und PCD und zieht man dann CB und AD, die sich in Q schneiden, sowie AC und BD, die sich in R schneiden, so schneidet nach dem in § 1 abgeleiteten und auf $RCQD$ angewandten Satz vom vollständigen Vierseit die Verbindungsgerade RQ die Sekante AB in E und die Sekante CD in F, so daß E der zu P konjugierte vierte harmonische Punkt auf PAB ist und F der zu P konjugierte vierte harmonische Punkt auf PCD ist. Nach dem in § 2 bewiesenen Pascalschen Satze liegt auf derselben ausgezeichneten Geraden QR aber auch der in der Figur mit (ab) bezeichnete Schnittpunkt der Tangenten in A und in B. Dies erkennt man, wenn man die beiden in A auf dem Kreise liegenden unendlich nahen Punkte mit 1 und 2, die in B unendlich nahen Punkte mit 4 und 5, den Punkt C mit 3 und den Punkt D mit 6 bezeichnet.

Dann schneiden sich die Verbindungsstrecken 1 2 und 4 5 in (ab), 2 3 und 5 6 in R, 3 4 und 6 1 in Q, so daß nach dem **Pascal**schen Satze der Punkt (ab) auf RQ liegen muß. Daß auch der Schnittpunkt (cd) der Tangente c in C mit der Tangente d in D auf

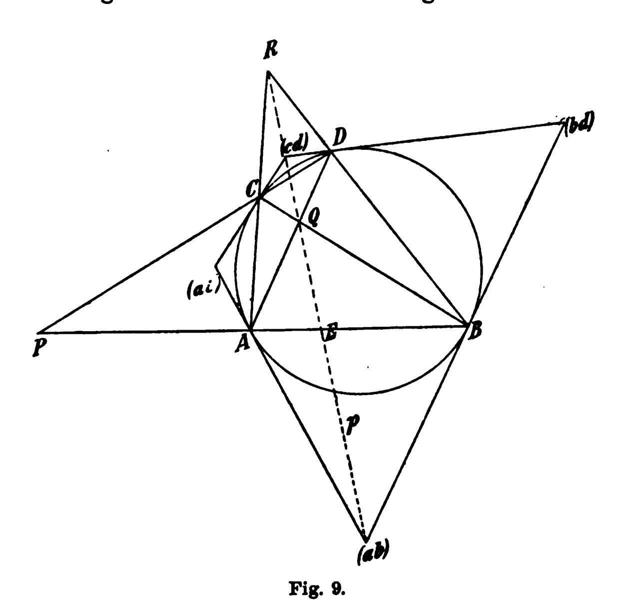


Fig. 9.

derselben Geraden QR liegen muß, erkennt man auch nach dem **Pascal**schen Satze, wenn man C mit 1 und 2, D mit 4 und 5, A mit 3, B mit 6 bezeichnet. Auf der zu P zugehörigen ausgezeichneten Geraden p liegen also:

1. die Punkte Q und R, die durch die beiden Sekanten PAB und PCD entstehen, indem AD mit CB und AC mit BD zum Schnitt gebracht werden;

2. die zu P konjugierten vierten harmonischen Punkte E und F auf den beiden Sekanten PAB und PCD;

3. die Schnittpunkte $(a\,b)$ und $(c\,d)$ der Tangenten a und b in A und B, bzw. der Tangenten c und d in C und D.

Dazu kommen, wenn P außerhalb liegt, viertens die Berührungspunkte der beiden Tangenten, die von P an den Kreis gelegt werden können, aber in der Figur nicht gezeichnet sind. Daß die Gerade p der Ort der P konjugierten vierten harmonischen Punkte auf allen Sekanten ist, die durch P gezogen werden können, folgt daraus, daß p schon durch eine einzige Sekante vollkommen bestimmt ist. Denn durch die eine Sekante PAB sind schon zwei Punkte von p, nämlich der P konjugierte vierte harmonische Punkt E und der Tangentenschnittpunkt $(a\,b)$ bestimmt. Man nennt die so zu einem Punkte P zugehörige, auf mehrfache Weise bestimmbare Gerade p die Polare des Punktes P. In der Figur ist P außerhalb des Kreises gezeichnet und seine Polare p mußte den Kreis schneiden, nämlich in den Berührungspunkten der beiden Tangenten, die von P an den Kreis gelegt werden können. Wie es kommt, wenn der Ausgangspunkt P innerhalb liegt, kann aber auch aus

der Figur entnommen werden. Denn aus dem Punkte Q, der in der Figur innerhalb liegt, erhält man durch die beiden Sekanten QBC und QAD die Punkte P und R genau so, wie oben Q und R aus P erhalten wurden, nämlich P als Schnitt von AB und CD, R als Schnitt von AC und BD. Demnach ist PR die Polare von Q. Ebenso erkennt man PQ als Polare von R. Das Dreieck PQR nennt man Polardreieck. Ein solches Polardreieck ist also durch eine seiner Ecken und einen Punkt auf einer anstoßenden Seite bestimmt und jede Seite desselben ist Polare der gegenüberliegenden Ecke. Während die Schnittpunkte der Tangenten in A und C, sowie derer in B und D auf PQ lagen, liegen die Schnittpunkte der Tangenten in A und D sowie in B und C auf PR, so daß das Tangentenvierseit, dessen Seiten a, b, c, d sind, und das Sehnenviereck, dessen Ecken die Berührungspunkte A, B, C, D sind, derartig zusammenhängen, daß die drei Diagonalen des Tangentenvierseits sich in den Diagonalpunkten des zugehörigen Sehnenvierecks schneiden.

Wenn ein Kreis gezeichnet vorliegt, so läßt sich, bloß mit dem Lineal, die Polare p jedes Punktes P leicht zeichnen, und zwar schneidet die Polare p den Kreis, wenn P außerhalb des Kreises liegt, und schneidet ihn nicht, wenn P innerhalb liegt. In beiden Fällen steht p senkrecht auf der Verbindungslinie von P mit dem Zentrum des Kreises, wie auf

mehrfache Weise elementar bewiesen werden kann. Liegt der Punkt P auf dem Kreise, so ist seine Polare p die Kreistangente, deren Berührungspunkt P ist. Da die Polare p eines Punktes P bezüglich eines Kreises auch entsteht, wenn man auf allen Sekanten, die durch P gehen, die P zugeordneten vierten harmonischen Punkte konstruiert, und da, wenn von vier harmonischen Punkten P, G, Q, H einer Geraden, Q zu P zugeordnet ist, auch P zu Q zugeordnet sein muß, so gilt der folgende Hauptsatz der Polarentheorie:

Wenn Q auf der Polaren zu P liegt, so muß P auf der Polaren zu Q liegen.

Wenn man den Punkt, zu dem eine Gerade p Polare ist, den Pol der Geraden nennt, kann man diesen Hauptsatz auch so aussprechen:

Die Polaren aller Punkte einer geraden Linie bilden einen Strahlbüschel, dessen Scheitel der Pol der geraden Linie ist.

X. Abschnitt.

Kreise und Kugeln.

§ 1. Die Konfiguration der Ähnlichkeitspunkte von drei oder mehr Kreisen.

Unter einer ebenen Konfiguration versteht man bekanntlich eine derartige Gruppierung von Punkten und Strahlen einer Ebene, daß auf jedem Strahl gleichviel Punkte liegen und von jedem Punkte gleichviel Strahlen ausgehen. Beispiele dieser Konfigurationen liefert schon die elementare Planimetrie. Jedes Polygon ist eine Konfiguration, indem es durch seine n Ecken und seine n Seiten eine Gruppierung von n Punkten und von n Strahlen darstellt, derartig daß jeder Strahl zwei Punkte enthält und jeder Punkt zwei Strahlen aussendet. Eine nicht ganz so triviale Konfiguration zeigt ein ebenes Polygon von n Seiten und n Ecken, wenn in demselben sämtliche Diagonalen gezogen sind, weil dann $\frac{1}{2}n(n-1)$ Strahlen und n Punkte vorhanden sind, jeder Strahl zwei dieser n Punkte enthält, und von jedem Punkte $n-1$ Strahlen ausgehen. Gewöhnlich bezeichnet man als Konfigu-

ration nur solche Gruppierungen von geraden Linien und Punkten, daß auf jeder geraden Linie mindestens drei Punkte liegen und jeder Punkt mindestens drei Strahlen aussendet. Die einfachste von derartigen Konfigurationen entsteht auf einer Ebene, wenn man außerhalb derselben fünf Punkte beliebig annimmt und auf der Ebene die Schnittpunkte aller möglichen

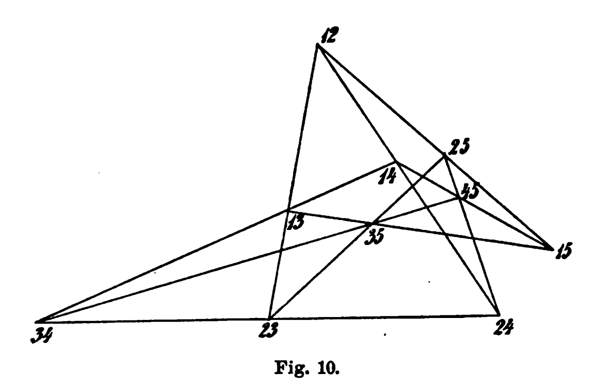


Fig. 10.

zehn Verbindungsgeraden der fünf Punkte und die Schnittgeraden aller möglichen zehn Verbindungsebenen der fünf Punkte feststellt (vgl. Fig. 10). In derselben Weise entstehen auch auf einer Ebene Konfigurationen mit mehr Punkten und Strahlen, wenn man außerhalb der Ebene 6, 7 oder allgemein n Punkte in allgemeiner Lage zueinander annimmt und ihre sämtlichen Verbindungsgeraden und ihre sämtlichen Verbindungsebenen mit der Ebene zum Schnitt bringt.

Die so entstehenden Konfigurationen bilden den Ausgangspunkt für eine gewisse Familie von Konfigurationen, die der Verfasser [1]) Kombinationskonfigurationen genannt hat, weil die Anzahl der Punkte und die Anzahl der Strahlen, die die Gruppierung bilden, immer Kombinationszahlen sind. Zu den Kombina-

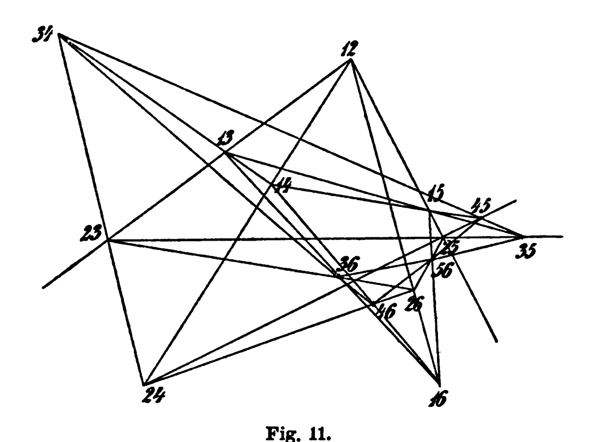


Fig. 11.

tionskonfigurationen gehört z. B. auch die in Fig. 11 dargestellte, die aus 20 Strahlen und 15 Punkten besteht, so daß auf jedem Strahl drei Punkte liegen und von jedem Punkte vier Strahlen ausgehen. Daß es aber auch noch andere Konfigurationen gibt,

---

[1]) In einer Abhandlung, die 1884 in den Mitteilungen der Hamb. Math. Gesellschaft erschien.

als solche, bei denen die Anzahl der Strahlen und der Punkte Kombinationszahlen sind, zeigt Fig. 12, in der neun Punkte und neun Strahlen so gruppiert sind, daß auf jedem Strahl drei Punkte liegen und jeder Punkt drei Strahlen aussendet. Jede ebene Konfiguration ist durch vier Zahlen charakterisiert,

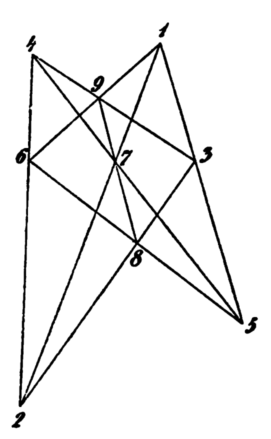


Fig. 12.

zwischen denen aber noch eine Gleichung besteht, so daß es im wesentlichen nur drei Zahlen sind, die eine Konfiguration charakterisieren. Wenn nämlich immer g die Anzahl der Geraden, p die Anzahl der Punkte der Konfiguration bedeutet, ferner p_g die Zahl der Punkte, die auf jeder Geraden liegen, g_p die Zahl der Geraden, die von jedem Punkte ausgehen, so muß

Die so entstehenden Konfigurationen bilden den Ausgangspunkt für eine gewisse Familie von Konfigurationen, die der Verfasser[1]) Kombinationskonfigurationen genannt hat, weil die Anzahl der Punkte und die Anzahl der Strahlen, die die Gruppierung bilden, immer Kombinationszahlen sind. Zu den Kombina-

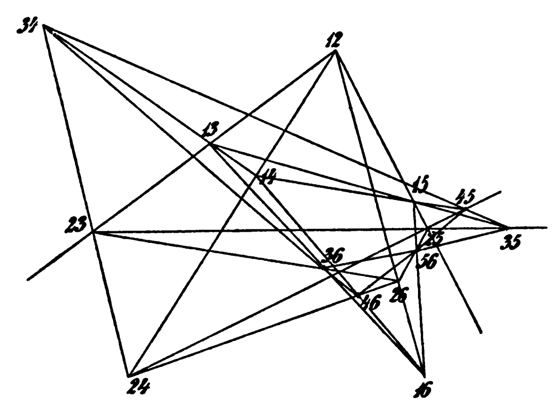


Fig. 11.

tionskonfigurationen gehört z. B. auch die in Fig. 11 dargestellte, die aus 20 Strahlen und 15 Punkten besteht, so daß auf jedem Strahl drei Punkte liegen und von jedem Punkte vier Strahlen ausgehen. Daß es aber auch noch andere Konfigurationen gibt,

[1]) In einer Abhandlung, die 1884 in den Mitteilungen der Hamb. Math. Gesellschaft erschien.

als solche, bei denen die Anzahl der Strahlen und der Punkte Kombinationszahlen sind, zeigt Fig. 12, in der neun Punkte und neun Strahlen so gruppiert sind, daß auf jedem Strahl drei Punkte liegen und jeder Punkt drei Strahlen aussendet. Jede ebene Konfiguration ist durch vier Zahlen charakterisiert,

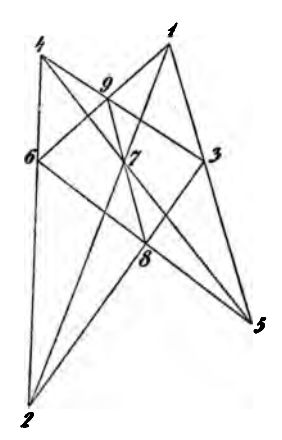


Fig. 12.

zwischen denen aber noch eine Gleichung besteht, so daß es im wesentlichen nur drei Zahlen sind, die eine Konfiguration charakterisieren. Wenn nämlich immer g die Anzahl der Geraden, p die Anzahl der Punkte der Konfiguration bedeutet, ferner p_g die Zahl der Punkte, die auf jeder Geraden liegen, g_p die Zahl der Geraden, die von jedem Punkte ausgehen, so muß

sich p ergeben, wenn man p_g mit g multipliziert und das erhaltene Produkt durch g_p dividiert. Ebenso muß sich g ergeben, wenn man g_p mit p multipliziert und das Produkt durch p_g dividiert. Beides kommt auf dasselbe heraus und ergibt die Gleichung:

$$g \cdot p_g = p \cdot g_p \,.$$

Beispielsweise ist bei der Konfiguration, die durch Fig. 11 dargestellt wird, $g = 15$, $p_g = 4$, $p = 20$, $g_p = 3$, ferner in Fig. 12: $g = 9$, $p_g = 3$, $p = 9$, $g_p = 3$.

Das Begriffliche und Beispiele zu den Konfigurationen kann man schon in der elementaren Planimetrie dem Schüler bringen. Nachdem er den Proportionallehrsatz und die Teilung einer Strecke durch zwei Punkte nach einem vorgeschriebenen Verhältnis begriffen hat, lasse man ihn die drei Seiten eines Dreiecks ABC durch dreimal zwei Punkte nach drei vorgeschriebenen Verhältnissen teilen, und zwar durch D und D', E und E', F und F', wo die nicht gestrichelten Buchstaben Punkte bedeuten, die innerlich teilen, oder, wie man auch sagen kann, nach negativem Verhältnis, und wo die gestrichelten Buchstaben Punkte bedeuten, die äußerlich oder nach positivem Teilungsverhältnis teilen. Wenn dann auf BC das Teilungsverhältnis r_b zu r_c, auf CA das Teilungsverhältnis r_c zu r_a und auf AB das Teilungsverhältnis r_a zu r_b gewählt wird, so erkennt der Schüler zunächst empirisch, daß

D, E, F' sowie D, E', F, sowie D', E, F
sowie auch D', E', F'

immer in gerader Linie liegen (Menelaos), was man ihm dann durch zweimalige Anwendung des Proportionallehrsatzes auch theoretisch beweisen kann. Faßt man nun nicht mehr die drei Punkte A, B, C, sondern nur die sechs Punkte D, E, F, D', E', F' ins Auge, so erkennt man in ihnen eine Konfiguration, indem jeder der sechs Punkte zwei Strahlen so aussendet, daß vier Strahlen entstehen und auf jedem derselben drei Punkte liegen. Diese sehr einfache Konfiguration, die man auch vollständiges Vierseit (IX, § 1) nennt, entsteht auch auf einer Ebene, wenn man außerhalb derselben vier Punkte annimmt, dann je zwei von ihnen durch eine gerade Linie, je drei von ihnen durch eine Ebene verbindet und endlich die sechs Verbindungsgeraden und die vier Verbindungsebenen mit der anfangs angenommenen Ebene zum Schnitt bringt.

Statt von einem Dreieck ABC auszugehen und die Seiten desselben in den drei Verhältnissen r_b zu r_c, r_c zu r_a, r_a zu r_b zu teilen, kann man auch von drei Kreisen mit den Zentren Z_1, Z_2, Z_3 und den Radien r_1, r_2, r_3 ausgehen und die Seiten des Dreiecks $Z_1 Z_2 Z_3$ in den drei Verhältnissen r_2 zu r_3, r_3 zu r_1, r_1 zu r_2 äußerlich und innerlich teilen. Dann nennt man die sechs Teilungspunkte:

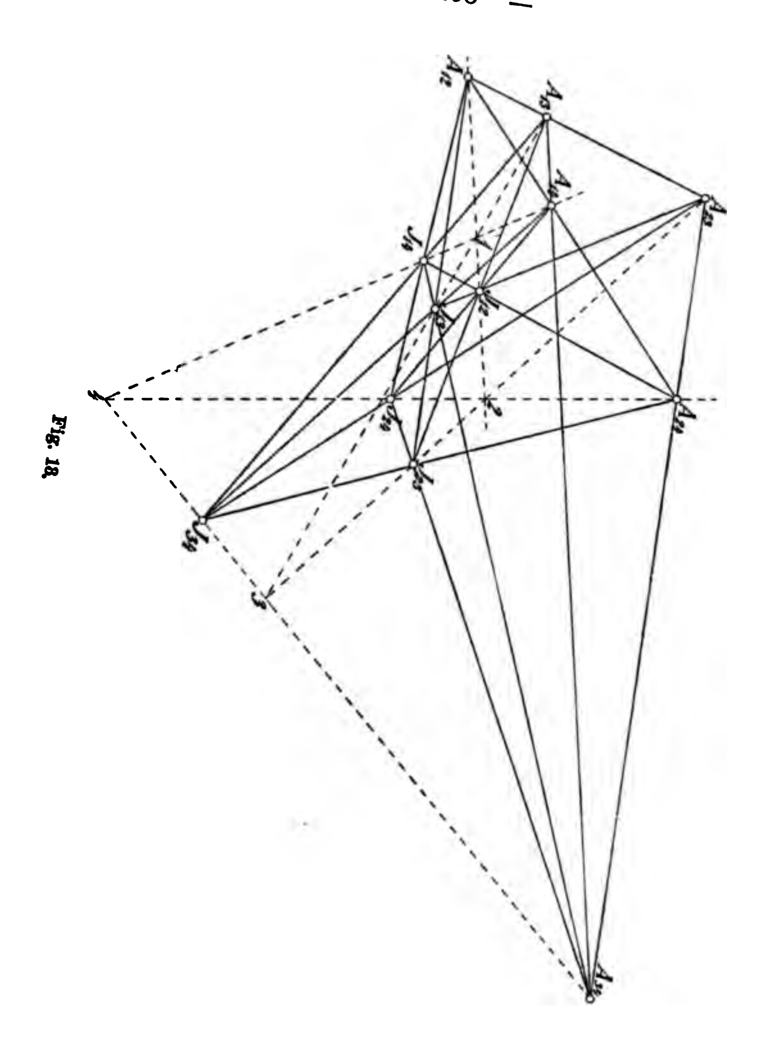


Fig. 18.

$$A_{12}\,,\quad A_{23}\,,\quad A_{31}\,,\quad J_{12}\,,\quad J_{23}\,,\quad J_{31}$$

die drei äußeren und die drei inneren Ähnlichkeitspunkte der drei Kreise. Dieselben bilden also ein vollständiges Vierseit, dessen vier Seiten die äußere Ähnlichkeitsachse und die drei inneren Ähnlichkeitsachsen sind, nämlich:

$$A_{12}A_{23}A_{31}\,,\quad A_{12}J_{23}J_{31}\,,\quad A_{23}J_{31}J_{12}\,,\quad A_{31}J_{12}J_{23}\,.$$

Wenn man nun, statt wie soeben von drei Kreisen, von vier, fünf, sechs und allgemein von n Kreisen ausgeht, und wieder, von den Zentren ganz absehend, nur die äußeren und inneren Ähnlichkeitspunkte ins Auge faßt, so erhält man Konfigurationen, die keine Kombinationskonfigurationen sind, und sämtlich darin übereinstimmen, daß die Zahl der Punkte auf jeder geraden Linie, also die oben eingeführte Zahl p_g gleich drei ist.

Beispielsweise ist in Fig. 13 die Konfiguration der zwölf Ähnlichkeitspunkte je zweier von vier Kreisen gezeichnet. Für sie ist $p = 12$, $g = 16$, $p_g = 3$, $g_p = 4$. Von den 16 Geraden der Konfiguration sind vier äußere Ähnlichkeitsachsen, indem jede derselben drei äußere Ähnlichkeitspunkte enthält, während die übrigen zwölf Geraden innere Ähnlichkeitsachsen sind, indem jede derselben einen äußeren und zwei innere Ähnlichkeitspunkte enthält. In der Fig. 13 sind die nicht zur Konfiguration gehörigen

vier Kreiszentren mitgezeichnet, die Kreise selbst aber fortgelassen.

Bei fünf Kreisen ist

$$p = 20\,, \quad g = 40\,, \quad p_g = 3\,, g_p = 6\,,$$

und die 40 Ähnlichkeitsachsen bestehen aus 10 äußeren und 30 inneren.

Bei sechs Kreisen ist $p = 30$, $g = 80$, $p_g = 3$, $g_p = 8$, und die 80 Ähnlichkeitsachsen bestehen aus 20 äußeren und 60 inneren.

Wenn man allgemein von n Kreisen ausgeht, oder, was auf dasselbe hinauskommt, von n Punkten Z_1, $Z_2, \ldots, Z_n$ und n Strecken $r_1, r_2, \ldots, r_n$, und dann jede mögliche Verbindungsstrecke $Z_i Z_k$ im Verhältnis r_i zu r_k innerlich und äußerlich teilt, so gelangt man zu einer Konfiguration, bei welcher noch immer $p_g = 3$ ist, bei welcher aber $g_p = 2\,(n - 2)$ ist, indem von jedem äußeren Ähnlichkeitspunkte immer $n - 2$ äußere und $n - 2$ innere Ähnlichkeitsachsen liegen, und indem von jedem inneren Ähnlichkeitspunkte $n - 2$ Paare von inneren Ähnlichkeitsachsen ausgehen. Jedes Paar entsteht dabei dadurch, daß von J_{ik} sowohl eine Ähnlichkeitsachse ausgeht, auf der J_{im} und A_{km} liegt, als auch eine, auf der A_{im} und J_{km} liegt. In diesem allgemeinen Falle ergeben sich $\frac{1}{2} n\,(n - 1)$ äußere Ähnlichkeitspunkte und $\frac{1}{2} n\,(n - 1)$ innere Ähnlichkeitspunkte, sowie $\frac{1}{6} n\,(n - 1)\,(n - 2)$ äußere Ähnlichkeitsachsen und $\frac{1}{2} n\,(n - 1)\,(n - 2)$ innere Ähnlichkeitsachsen. Diese Resultate werden

durch die oben aufgestellte allgemeine Gleichung $g \cdot p_g = p \cdot g_p$ bestätigt, da wir

$$p = n(n-1), \quad g = \tfrac{2}{3} n(n-1)(n-2),$$
$$p_g = 3, \quad g_p = 2(n-2)$$

gefunden haben.

§ 2. Die Konfiguration der Ähnlichkeitspunkte von vier und mehr Kugeln.

So wie in § 1 die Ähnlichkeitspunkte bei drei und mehr Kreisen den Anfänger in die ebenen Konfigurationen einführten und ihm Beispiele dafür gaben, so können die Ähnlichkeitspunkte bei vier und mehr Kugeln in die Theorie der räumlichen Konfigurationen einführen. So wie man dort, statt von drei Kreisen einer Ebene auszugehen, auch von den drei Seiten eines Dreiecks und den sechs Punkten ausgehen konnte, die diese Seiten im Verhältnis dreier beliebig gegebener Strecken innerlich und äußerlich teilten, so kann man auch hier, statt von vier Kugeln, von einem räumlichen Viereck und vier zugehörigen Strecken ausgehen. Sind O_1, O_2, O_3, O_4 vier Punkte im Raume und in beliebiger Lage zueinander, und sind außerdem, ihnen zugeordnet, r_1, r_2, r_3, r_4 vier beliebige Strecken, so denke man sich jede der sechs Verbindungsstrecken:

$$O_1 O_2, \quad O_2 O_3, \quad O_3 O_1, \quad O_1 O_4, \quad O_2 O_4, \quad O_3 O_4$$

beziehungsweise im Verhältnis

$$r_1 \text{ zu } r_2, \quad r_2 \text{ zu } r_3, \quad r_3 \text{ zu } r_1, \quad r_1 \text{ zu } r_4,$$
$$r_2 \text{ zu } r_4, \quad r_3 \text{ zu } r_4$$

innerlich und äußerlich geteilt, und zwar durch die 12 Teilpunkte:

$$J_{12}, \ J_{23}, \ J_{31}, \ J_{14}, \ J_{24}, \ J_{34},$$

beziehungsweise:

$$A_{12}, \ A_{23}, \ A_{31}, \ A_{14}, \ A_{24}, \ A_{34}.$$

Diese zwölf Punkte können natürlich auch als die sechs inneren und sechs äußeren Ähnlichkeitspunkte von vier Kugeln aufgefaßt werden, deren Zentra O_1, O_2, O_3, O_4 sind und deren Radien bzw. r_1, r_2, r_3, r_4 sind. Wie in § 1 erkennt man dann, daß immer solche drei äußeren Ähnlichkeitspunkte in gerader Linie liegen, in deren Indices nur dieselben drei Zahlen vorkommen, wie z. B.:

$$A_{13}, \ A_{14}, \ A_{34},$$

und daß außerdem immer ein äußerer Ähnlichkeitspunkt mit zwei inneren in gerader Linie liegt, und zwar dann, wenn wieder in den Indices der drei Ähnlichkeitspunkte nur dieselben drei Zahlen vorkommen, wie in:

$$A_{24}, \quad J_{23}, \quad J_{34}.$$

So entstehen vier Ähnlichkeitsachsen, deren jede drei äußere Ähnlichkeitspunkte enthält. Es wird passend sein, dieselben bzw. mit:

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ a_4$$

zu bezeichnen, wenn in den Indices der drei auf ihr

liegenden äußeren Ähnlichkeitspunkte der an a angesetzte Index nicht vorkommt, so daß z. B.:

$$a_3 \text{ die Punkte } A_{12}, \ A_{14}, \ A_{24}$$

enthält. Was die inneren Ähnlichkeitsachsen anbetrifft, deren jede einen äußeren und zwei innere Ähnlichkeitspunkte enthält, so muß es immer zwei geben, die denselben äußeren Ähnlichkeitspunkt enthalten. Der Punkt A_{12} liegt z. B.

$$\text{sowohl mit } J_{13} \text{ und } J_{23}$$
$$\text{als auch mit } J_{14} \text{ und } J_{24}$$

in gerader Linie. Die erste gerade Linie wollen wir i_{34} nennen, um durch den an i angehängten Index 3 anzudeuten, daß die beiden auf ihr liegenden inneren Ähnlichkeitspunkte beide den Index 3 haben, und um durch den an i angehängten zweiten Index 4 anzudeuten, daß in den Indices der drei auf ihr liegenden Ähnlichkeitspunkte die Zahl 4 nicht vorkommt. Wir unterscheiden dadurch i_{34} von i_{43}, indem, nach analoger Bezeichnung:

$$i_{43} \text{ die drei Punkte } A_{12}, \ J_{14}, \ J_{24}$$

enthalten muß. Während also bei den Ähnlichkeitspunkten die beiden Indices vertauschbar sind, sind die beiden an i angesetzten Indices nicht vertauschbar. Hiernach muß es zweimal sechs, also 12 innere Ähnlichkeitsachsen geben. Die 12 Ähnlichkeitspunkte von vier Kugeln liegen also immer zu dreien auf 16 Ähnlichkeitsachsen, 4 äußeren und 12 inneren. Dabei liegt

derselbe Ähnlichkeitspunkt auf vier von diesen 16 Ähnlichkeitsachsen. Z. B. geht von A_{12} aus:

$$a_3, \ a_4, \ i_{34}, \ i_{43}.$$

Ferner geht von J_{12} aus:

$$i_{13}, \ i_{14}, \ i_{23}, \ i_{24}.$$

Durch zwei denselben Ähnlichkeitspunkt enthaltende Ähnlichkeitsachsen läßt sich immer eine Ebene legen, und in einer solchen Ähnlichkeitsebene liegt immer ein vollständiges Vierzeit, bestehend aus vier Ähnlichkeitsachsen, die sich in sechs Ähnlichkeitspunkten schneiden (§ 1). Auch für die Ähnlichkeitsebenen läßt sich eine gute Bezeichnung einführen. Die Ebene, in der alle sechs äußeren Ähnlichkeitspunkte, und deshalb auch die vier äußeren Ähnlichkeitsachsen:

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ a_4$$

liegen, soll e heißen. Die Ebene, in der die vier Ähnlichkeitsachsen

$$a_1, \ i_{12}, \ i_{13}, \ i_{14},$$

also die sechs Ähnlichkeitspunkte

$$A_{23}, \ A_{24}, \ A_{34}, \ J_{12}, \ J_{13}, \ J_{14}$$

liegen, wird passender Weise mit e_1 bezeichnet. Analog erhalten wir e_2, e_3, e_4. Außer diesen vier inneren Ähnlichkeitsebenen, die drei äußere und drei innere Ähnlichkeitspunkte enthalten, gibt es noch drei Ähnlichkeitsebenen, von denen jede zwei äußere und vier innere Ähnlichkeitspunkte enthält, und die wir mit

$$e_{12}, \; e_{13}, \; e_{14}$$

bezeichnen wollen, aber auch bzw. mit

$$e_{34}, \; e_{24}, \; e_{23}$$

bezeichnen könnten, indem die Ähnlichkeitsebene e_{12} die sechs Punkte:

$$A_{12}, \; A_{34}, \; J_{13}, \; J_{14}, \; J_{23}, \; J_{24}$$

oder die vier Achsen:

$$\dot{i}_{12}, \; \dot{i}_{21}, \; \dot{i}_{34}, \; \dot{i}_{43}$$

enthält, und die Ebene e_{13} die sechs Punkte:

$$A_{13}, \; A_{24}, \; J_{12}, \; J_{14}, \; J_{32}, \; J_{34}$$

und die vier Achsen:

$$\dot{i}_{13}, \; \dot{i}_{31}, \; \dot{i}_{24}, \; \dot{i}_{42}$$

enthält, und endlich die Ebene e_{14} die sechs Punkte:

$$A_{14}, \; A_{23}, \; J_{12}, \; J_{13}, \; J_{42}, \; J_{43}$$

und die vier Achsen:

$$\dot{i}_{14}, \; \dot{i}_{41}, \; \dot{i}_{23}, \; \dot{i}_{32}$$

in sich birgt. Die Konfiguration der zwölf Ähnlichkeitspunkte von vier beliebig gelegenen Kugeln enthält also acht Ähnlichkeitsebenen.

Entsprechend der in § 1 abgeleiteten Beziehung zwischen p, g, p_g, g_p kann man bei jeder räumlichen Konfiguration drei Beziehungen zwischen den neun Zahlen:

$$p, \; g, \; e, \; p_g, \; g_p, \; p_e, \; g_e, \; e_p, \; e_g$$

angeben, wo p angibt, wieviel Punkte die Konfiguration

umfaßt, g angibt, wieviel gerade Linien sie hat, e angibt, wieviel Ebenen sie enthält, und wo p_g angibt, wieviel Punkte jede gerade Linie enthält, g_p, wieviel gerade Linien durch jeden Punkt gehen, wo ferner p_e und g_e angeben, wieviel Punkte bzw. Strahlen in jeder Ebene liegen, sowie e_p und e_g, wieviel Ebenen durch jeden Punkt gehen, bzw. wieviel Ebenen durch jede gerade Linie gehen. Wie in § 1 besteht auch hier im Raume die Beziehung

$$p \cdot g_p = g \cdot p_g ,$$

wozu noch hinzutreten:

$$p \cdot e_p = e \cdot p_c \quad \text{und} \quad g \cdot e_g = e \cdot g_e ,$$

zwei Beziehungen, die man sich in derselben Weise wie die erste klar machen kann. Bei der oben besprochenen Konfiguration der zwölf Ähnlichkeitspunkte von vier Kugeln ergab sich:

$$p = 12 , \quad g = 16 , \quad e = 8 , \quad p_g = 3 , \quad g_p = 4 ,$$
$$p_e = 6 , \quad g_e = 4 , \quad e_p = 4 , \quad e_g = 2 ,$$

im Einklang mit den oben abgeleiteten drei Beziehungen.

Man gelangt zu einer interessanten Familie von räumlichen Konfigurationen, wenn man weiter die Ähnlichkeitspunkte von fünf Kugeln, von sechs Kugeln und überhaupt von n Kugeln bestimmt. Dabei bleiben drei von den neun charakterisierenden Zahlen unabhängig von der Zahl n der Kugeln, nämlich:

$$p_g = 3 , \quad g_e = 4 , \quad p_e = 6 .$$

Dazu treten bei fünf Kugeln:

$$p = 20, \quad g = 40, \quad e = 40, \quad g_p = 6,$$
$$e_p = 12, \quad e_g = 4.$$

Wenn man von n Kugeln ausgeht, oder, was dasselbe ist, von n im Raume liegenden Punkten und n ihnen zugehörigen Strecken, nach deren Verhältnis die $\frac{1}{2} n(n-1)$ Verbindungsstrecken innerlich und äußerlich zu teilen sind, so gelangt man zu dem allgemeinen Fall, in welchem man findet:

$$p = n(n-1), \quad g = \tfrac{2}{3} n(n-1)(n-2),$$
$$e = \tfrac{1}{3} n(n-1)(n-2)(n-3), \quad p_g = 3,$$
$$g_p = 2(n-2), \; p_e = 6, \; g_e = 4, \; e_p = 2(n-2)(n-3),$$
$$e_g = 2(n-3).$$

§ 3. Chordalen bei drei und mehr Kreisen.

Potenz eines Punktes P bezüglich eines Kreises nennt man das nach dem Sekantensatze konstante Produkt, das auf jeder durch P gehenden Sekante aus den beiden Strecken von P bis zu den beiden Schnittpunkten mit dem Kreise gebildet werden kann. Liegt P außerhalb eines Kreises, so ist die Potenz des Punktes P bezüglich des Kreises auch dargestellt durch das Quadrat der Entfernungen von P bis zu den Berührungspunkten auf den beiden von P an den Kreis gehenden Tangenten. Liegt P innerhalb eines Kreises, so ist seine Potenz bezüglich des Kreises

auch dargestellt durch das Quadrat der Hälfte der Sehne, deren Halbierungspunkt P ist. Für zwei Kreise, die sich schneiden, hat jeder Punkt P auf der Verlängerung der gemeinsamen Sehne AB die Potenz PA mal PB bezüglich des einen und des anderen Kreises, so daß P bezüglich beider Kreise gleiche Potenzen hat. Aber auch, wenn die Kreise

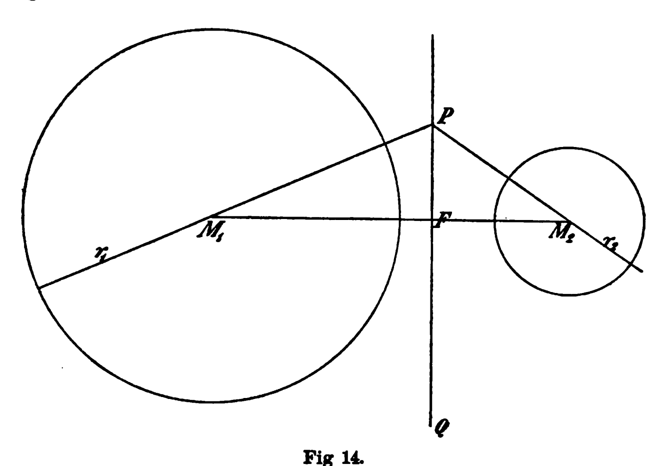


Fig 14.

sich nicht schneiden, gibt es, wenn es einen Punkt gibt, unzählig viele Punkte P, die in bezug auf den einen Kreis dieselbe Potenz haben, wie in bezug auf den anderen Kreis, was aus dem folgenden Satze hervorgeht.

Wenn ein Punkt P in bezug auf einen Kreis dieselbe Potenz hat wie in bezug auf einen

anderen, so muß dieselbe Eigenschaft auch jeder Punkt Q haben, der auf dem Lote PF liegt, das man von P auf die Zentrale M_1M_2 der beiden Kreise fällen kann. (Fig. 14.)

Wenn nämlich r_1 und r_2 die Radien der beiden Kreise sind, so ist die Potenz des Punktes P bezüglich des Kreises um M_1 gleich $(PM_1 + r_1)(PM_1 - r_1)$, also durch $PM_1^2 - r_1^2$ ausdrückbar, analog bezüglich des Kreises um M_2, so daß nach Voraussetzung:

(1) $$PM_1^2 - r_1^2 = PM_2^2 - r_2^2$$

sein muß. Andererseits ist nach dem Pythagoras:

(2) $$PF^2 = PM_1^2 - M_1F^2 = PM_2^2 - M_2F^2,$$

woraus folgt:

(3) $$PM_1^2 - PM_2^2 = (M_1F + M_2F)(M_1F - M_2F)$$
$$= M_1M_2(M_1F - M_2F)$$

oder, mit Benutzung von (1):

(4) $$r_1^2 - r_2^2 = M_1M_2(M_1F - M_2F).$$

Die Gleichung (3) gilt genau so für jeden Punkt Q, der auf PF oder der Verlängerung von PF liegt. Also ist auch:

(5) $$QM_1^2 - QM_2^2 = M_1M_2(M_1F - M_2F).$$

Aus (4) und (5) folgt durch Gleichsetzung

(6) $$QM_1^2 - r_1^2 = QM_2^2 - r_2^2,$$

oder:

$$(QM_1 + r_1)(QM_1 - r_1) = (QM_2 + r_2)(QM_2 - r_2),$$

d. h. Q hat bezüglich beider Kreise dieselbe Potenz.

Ebenso erkennt man aus (4) und (5), daß jeder Punkt, der außerhalb des Lotes PF oder seiner Verlängerung liegt, ungleiche Potenz bezüglich beider Kreise haben muß, indem für solche Punkte der Fußpunkt des auf die Zentrale gefällten Lotes von F verschieden sein muß, also auch die linken Seiten von (4) und (5) ungleich sein müssen. Wir erhalten also den Satz:

Alle Punkte, welche bezüglich zweier Kreise um M_1 und M_2 gleiche Potenz haben, bilden eine gerade Linie, die senkrecht zur Zentrale $M_1 M_2$ ist.

Diese gerade Linie nennt man die Chordale der beiden Kreise. Falls die Kreise sich schneiden, ist die Verbindungsgerade der beiden Schnittpunkte ihre Chordale, wie schon oben angedeutet ist. Ferner muß die Chordale auf jeder gemeinsamen Tangente die Strecke zwischen den Berührungspunkten halbieren. Sie kann also sehr leicht gezeichnet werden, falls die Kreise zwei gemeinsame Punkte haben oder, falls sie zwei gemeinsame Tangenten haben. Wenn drei Kreise um M_1, M_2, M_3 vorliegen, so hat jeder Punkt der Chordale c_{12} zu den beiden Kreisen um M_1 und um M_2 gleiche Potenz bezüglich des Kreises um M_1 und um M_2. Ebenso muß jeder Punkt der Chordale c_{23} der Kreise um M_2 und um M_3 gleiche Potenz in bezug auf die Kreise M_2 und um M_3 haben. Folglich muß der Schnittpunkt C der beiden Chordalen

c_{12} und c_{23} auch gleiche Potenz bezüglich der Kreise um M_1 und um M_3 haben, d. h. ein Punkt auf der dritten Chordale c_{13} zwischen den Kreisen um M_1 und um M_3 sein. Oder:

Die drei Chordalen c_{12}, c_{23}, c_{13} je zweier von drei Kreisen um M_1, um M_2 und um M_3 schneiden sich in einem einzigen Punkte C, dem Chordalpunkt der drei Kreise.

Dieser wichtige Satz ergibt auch ein einfaches Mittel, um die Chordale zweier Kreise zu konstruieren, welche weder gemeinsame Punkte noch gemeinsame Tangenten besitzen, von denen also die Fläche des kleineren ganz innerhalb der Fläche des größeren liegt. Man braucht nämlich nur einen Kreis zu zeichnen, der die beiden Kreise, um M_1 und um M_2, schneidet, den Schnittpunkt der gemeinsamen Sehnen aufzusuchen, und von ihm aus auf die Zentrale das Lot zu fällen. Oder, man kann auch durch zwei Kreise, von denen jeder die Kreise um M_1 und um M_2 schneidet, zwei Paare gemeinschaftlicher Sehnen bestimmen, dadurch zwei Punkte gleicher Potenz bezüglich der Kreise um M_1 und um M_2 bestimmen, um durch ihre Verbindungsstrecke die gesuchte Chordale der beiden Kreise zu erhalten. Natürlich kann man diese Konstruktionen der Chordale zweier Kreise auch in den beiden andern Fällen anwenden, wo die Kreise sich schneiden oder, wo der eine ganz außerhalb des andern liegt. Im ersten dieser beiden Fälle ist es

freilich viel einfacher, durch die Verbindung der Schnittpunkte die Chordale zu erhalten. Im zweiten Falle jedoch wird man häufig die genannten Konstruktionen anwenden, um dadurch die Konstruktion gemeinsamer Tangenten zu ersparen. In diesem zweiten Falle muß die Chordale die Zentrale in einem Punkte treffen, der zwischen den beiden Zentren und zwischen ihren Peripherien liegt, näher dem größeren Kreise. Falls der eine Kreis ganz innerhalb des andern liegt, muß die Chordale die Zentrale außerhalb der Strecke zwischen den Zentren, und zwar auf der Verlängerung der Zentrale über das Zentrum des kleineren Kreises hinaus, aber außerhalb des größeren Kreises treffen. Falls die Kreise sich von außen berühren, also der Berührungspunkt zwischen den Zentren liegt, ist die Berührungstangente, also das Lot im Berührungspunkt auf der Zentrale die Chordale der beiden sich von außen berührenden Kreise. Wenn die Kreise sich von innen berühren, also der Berührungspunkt auf der Verlängerung der Strecke zwischen den Zentren liegt, ist gleichfalls die Berührungstangente, also das Lot im Berührungspunkt auf der Verlängerung der Zentrale, die Chordale der beiden sich von innen berührenden Kreise.

In § 1 war erkannt, daß bei drei Kreisen die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte je zweier in gerader Linie liegen, und daß auch immer ein äußerer mit zwei inneren Ähnlichkeitspunkten in gerader Linie

liegt, so daß die vier Ähnlichkeitsachsen ein Vierseit mit seinen sechs Schnittpunkten, also ein vollständiges Vierseit (Abschnitt IX, § 1) bildeten. Dann war durch vier Kreise, ihre zwölf Ähnlichkeitspunkte und ihre sechzehn Ähnlichkeitsachsen eine ebene Konfiguration erschlossen. In ähnlicher Weise kann man hier die Konstruktion der Chordalen bei vier und mehr Kreisen vornehmen. Die sich daraus ergebenden Konfigurationen sind jedoch keine anderen als die schon in Abschnitt IX, § 1 erwähnten Kombinationskonfigurationen. Bei vier Kreisen ergeben sich sechs Chordalen und vier Chordalpunkte, nämlich die vier Ecken eines Vierecks, dessen sechs Verbindungsgeraden die Chordalen sind. Bei fünf Kreisen erhält man zehn Chordalen und zehn Chordalpunkte, so daß jede Chordale drei Chordalpunkte enthält und jeder Chordalpunkt drei Chordalen aussendet. Allgemein ergeben sich bei n Kreisen $\frac{1}{2}n(n-1)$ Chordalen und $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ Chordalpunkte, so daß jede Chordale $n-2$ Chordalpunkte enthält und jeder Chordalpunkt drei Chordalen aussendet.

§ 4. Chordalebenen bei vier und mehr Kugeln.

Läßt man die Figur des § 3 um die Zentrale M_1FM_2 rotieren, so werden aus den beiden Kreisen zwei Kugeln und aus der Chordale eine zur Zentrale senkrechte Ebene, auf der jeder Punkt P gleiche Potenz bezüglich der beiden Kugeln haben muß,

wo unter Potenz eines Punktes P bezüglich einer Kugel das für alle durch P gehenden Sekanten konstante Produkt der beiden Strecken zu verstehen ist, die auf einer Sekante zwischen P und jedem der beiden Kugelschnittpunkte entstehen. Demnach ist der Ort für alle Punkte, welche bezüglich zweier Kugeln um O_1 und um O_2 gleiche Potenz haben, eine zur Zentrale $O_1 O_2$ senkrechte Ebene, die Chordalebene der beiden Kugeln heißt, und c_{12} heißen soll.

Hat man drei Kugeln um O_1, O_2, O_3, so muß die Ebene, die durch O_1, O_2, O_3 gelegt werden kann, jede der drei Chordalebenen, die je zwei Kugeln zugehören, in der Chordale der beiden Kreise schneiden, welche die durch die drei Zentra gelegte Ebene aus den beiden Kugeln ausschneidet. Hieraus folgt aber, daß die drei Chordalebenen c_{12}, c_{13}, c_{23} sich in einer geraden Linie c_{123} schneiden, welche auf der Ebene durch die drei Zentra O_1, O_2, O_3 senkrecht steht, und zwar im Chordalpunkte (§ 3) der drei Kreise, in welchen diese Ebene die drei Kugeln schneidet. Die gerade Linie c_{123}, die der Ort für alle Punkte ist, welche gleiche Potenz bezüglich der drei Kugeln um O_1, um O_2 und um O_3 haben, soll Chordalachse heißen.

Kommt eine vierte Kugel um O_4 hinzu, so muß der Schnittpunkt c_{1234} oder C der auf die drei Kugeln um O_1, O_2, O_3 bezüglichen Chordalachse c_{123} mit der Chordalebene zwischen der Kugel um O_4

und einer der drei Kugeln, die Eigenschaft haben, daß er bezüglich aller vier Kugeln eine und dieselbe Potenz hat. Durch diesen Punkt c_{1234}, den Chordalpunkt der vier Kugeln, gehen also hindurch: erstens die vier Chordalachsen

$$c_{123}, \quad c_{124}, \quad c_{134}, \quad c_{234},$$

zweitens die sechs Chordalebenen

$$c_{12}, \quad c_{13}, \quad c_{14}, \quad c_{23}, \quad c_{24}, \quad c_{34}.$$

In § 2 hatten wir die Lage der zweimal sechs Ähnlichkeitspunkte von vier Kugeln besprochen, und dann die Lage der Ähnlichkeitspunkte je zweier bei fünf und bei n Kugeln besprochen. Es liegt nahe, auch für die hier definierten Chordalebenen je zweier Kugeln den analogen Weg zu gehen. Doch gelangen wir dabei zu keinen anderen räumlichen Konfigurationen, als zu solchen, die mit den Kombinationszahlen zusammenhängen, und, falls sie ebene sind, in § 1 besprochen sind. Wenn wir die in § 2 eingeführte Bezeichnung auch hier festhalten, ergibt sich aus den Chordalebenen, den Chordalachsen und den Chordalpunkten von je zweien, je dreien und je vier Kugeln aus n Kugeln eine räumliche Konfiguration, bei welcher ist:

$$e = \tfrac{1}{2} n (n-1), \quad g = \tfrac{1}{6} n (n-1)(n-2),$$
$$p = \tfrac{1}{24} n (n-1)(n-2)(n-3),$$
$$e_g = 3, \quad g_e = n-2, \quad p_g = n-3, \quad g_p = 4,$$
$$e_p = 6, \quad p_e = \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3);$$

§ 5. Die Steinersche Lösung des Problems des Apollonius.

Wenn zwei Kreise sich von außen berühren, so teilt der zwischen den Zentren liegende Berührungs-

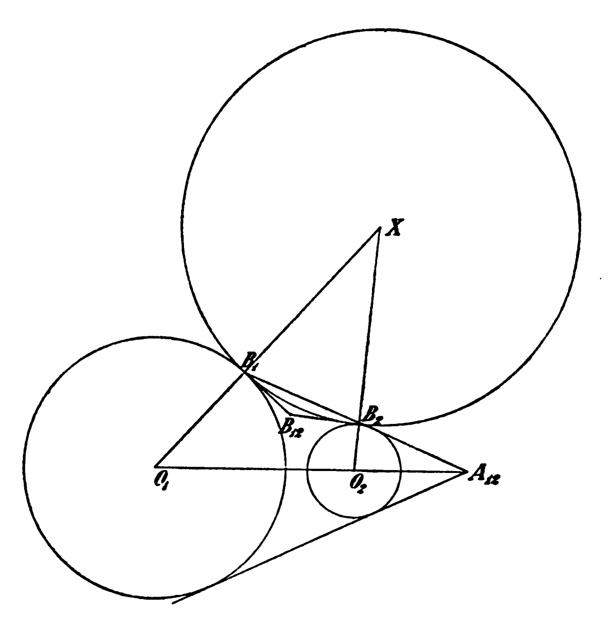


Fig. 15.

punkt die Zentrale der beiden Kreise im Verhältnis der Radien, ist also der innere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise. Ihre Chordale ist, wie schon in § 3

erwähnt wurde, die Berührungstangente, d. h. das Lot, errichtet auf der Zentrale im Berührungspunkt. Wenn zwei Kreise sich von innen berühren, so teilt der auf der Zentrale, aber außerhalb der Strecke zwischen den Zentren liegende Berührungspunkt die Zentrale der beiden Kreise gleichfalls im Verhältnis der Radien, ist also der äußere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise. Auch in diesem zweiten Falle ist die Chordale der beiden sich von innen berührenden Kreise die Berührungstangente, also das Lot auf der Zentrale im Berührungspunkt,

Wenn jeder von zwei Kreisen um O_1 und um O_2 von einem dritten Kreise um X berührt werden, so geht nach den in § 1 bewiesenen Sätzen die Verbindungsgerade der beiden Berührungspunkte, die Berührungssehne heißen soll, stets durch den äußeren oder inneren Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise, und zwar ist dies der äußere Ähnlichkeitspunkt A_{12} der beiden Kreise um O_1 und um O_2 sowohl, wenn die Berührung beide Male von außen stattfindet, weil dann beide Berührungspunkte innere Ähnlichkeitspunkte sind, als auch, wenn die Berührung beide Male von innen stattfindet, weil dann beide Berührungspunkte äußere Ähnlichkeitspunkte sind. Wenn dagegen der Kreis um X den einen der beiden Kreise von außen, den andern von innen berührt, so muß die Berührungssehne durch den inneren Ähnlichkeitspunkt J_{12} der beiden Kreise um O_1 und um O_2 gehen.

Diese beiden Resultate können wir demnach übersichtlich so aussprechen:

I. Erleidet ein Kreispaar durch einen Kreis eine gleichartige bzw. ungleichartige Berührung, so geht die Berührungssehne durch den äußeren bzw. inneren Ähnlichkeitspunkt des Kreispaares (Fig. 15).

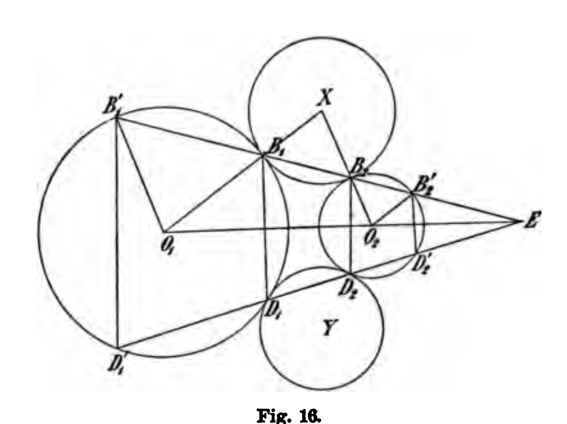


Fig. 16.

Der Schnittpunkt B_{12} der Berührungstangenten in den beiden Berührungspunkten B_1 und B_2 muß ferner nach den in § 3 abgeleiteten Sätzen ein Punkt der Chordale c_{12} der beiden Kreise um O_1 und O_2 sein. Wir wenden nun den in IX, § 3 bewiesenen Hauptsatz der Polarentheorie an, indem wir beachten, daß die Berührungssehne $B_1 B_2$ die Polare des Punktes

B_{12} bezüglich des Kreises um X ist. Dadurch erhalten wir den Satz:

II. Wenn ein Kreispaar durch einen Kreis um X berührt wird, so geht die Berührungssehne durch den bezüglich des Kreises um X bestimmten Pol der Chordale des Kreispaares.

Die Berührungssehne $B_1 B_2$ schneidet jeden der beiden Kreise um O_1 und um O_2 noch einmal (Fig. 16), und zwar den Kreis um O_1 noch einmal in B_1', den Kreis um O_2 noch einmal in B_2'. Nun sind $X B_1 B_2$, sowie $O_1 B_1 B_1'$ und $O_2 B_2 B_2'$ gleichschenklige Dreiecke, und $X B_1 O_1$ sowie $X B_2 O_2$ sind gerade Linien. Daraus folgt, daß $O_1 B_1'$ mit $O_2 B_2$ parallel ist, und daß auch $O_1 B_1$ mit $O_2 B_2'$ parallel ist. Wenn nun ein vierter Kreis um Y gleichfalls die Kreise um O_1 und um O_2 berührt, und zwar entweder gleichartig, falls das Kreispaar von dem Kreise um X gleichartig berührt wurde, oder ungleichartig, falls das Kreispaar von dem Kreise um X ungleichartig berührt wurde, so erhalten wir eine zweite Berührungssehne $D_1 D_2$, die mit $B_1 B_2$ sich in A_{12} schneidet, falls die Berührung gleichartig war, und in J_{12}, falls die Berührung ungleichartig war. Um beide Fälle nicht unterscheiden zu müssen, heiße E der äußere oder innere Ähnlichkeitspunkt, so daß E durch A_{12} bzw. J_{12} zu ersetzen ist, je nachdem jeder der beiden Kreise um X und um Y eine gleichartige oder eine ungleichartige Berührung ausübte. Durch die beiden sich

in E schneidenden Berührungssehnen werden in jedem Kreise vier Punkte bestimmt, so daß durch deren Verbindung zwei Sehnenvierecke $B_1 D_1 D'_1 B'_1$ und $B_2 D_2 D'_2 B'_2$ entstehen. Diese beiden Sehnenvierecke haben nun parallele Seiten, weil, wie schon oben erwähnt ist, $O_1 B_1$ mit $O_2 B'_2$, $O_1 B'_1$ mit $O_2 B_2$ parallel ist, und nun auch, wegen der zweiten Berührungssehne $O_1 D_1$ mit $O_2 D'_2$, $O_1 D'_1$ mit $O_2 D_2$ parallel sein muß. Hiernach sind die vier Winkel des einen Sehnenvierecks den vier Winkeln des anderen Sehnenvierecks gleich. Geht man nun von zwei solchen gleichen Winkeln aus, und nimmt vom einen den Nebenwinkel, vom andern den Nebenwinkel des ihm im Sehnenviereck gegenüberliegenden Winkels, so erhält man, daß in dem aus den vier Berührungspunkten:

$$B_1, \ B_2, \ D_1, \ D_2$$

gebildeten Vierecks je zwei gegenüberliegende Winkel Supplemente sind, dieses Viereck also auch ein Sehnenviereck, so daß

$$EB_1 \cdot EB_2 = ED_1 \cdot ED_2$$

ist, d. h. der Ähnlichkeitspunkt E bezüglich der beiden Kreise um X und um Y gleiche Potenz hat, oder, was dasselbe ist, auf der Chordale der beiden Kreise um X und um Y liegen muß. Hiernach haben wir den folgenden Satz erhalten:

III. Erleidet ein Kreispaar um O_1 und

um O_2 durch einen Kreis um X eine gleichartige bzw. ungleichartige Berührung und ebenso durch einen Kreis um Y eine gleichartige bzw. ungleichartige Berührung, so geht die Chordale der beiden Kreise um X und um Y durch den äußeren bzw. inneren Ähnlichkeitspunkt des Kreispaars.

Diese Sätze liefern nun die berühmte Steinersche Lösung des von Apollonius zuerst aufgestellten Problems, einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise berührt.

Wenn nämlich ein Kreistripel um O_1, um O_2 und um O_3 durch jeden von zwei Kreisen, um X und um X' eine Berührung erleidet, die zunächst gleichartig sei, so muß nach Satz III die Chordale von X und X' durch A_{12}, durch A_{13} und durch A_{23} gehen, wo A_{12}, A_{13}, A_{23} die äußeren Ähnlichkeitspunkte der drei Kreispaare sind, die das Kreistripel zusammensetzen. Demnach ist die Chordale der beiden Kreise um X und um X' die äußere Ähnlichkeitsachse des Kreistripels (§ 1). Folglich liegt nach Satz II der Pol der äußeren Ähnlichkeitsachse des Kreistripels bezüglich des Kreises um O_1 auf der in diesem Kreise durch die Kreise um X und um X' hervorgerufenen Berührungssehne. Genau so ist es mit den Kreisen um O_2 und um O_3. Immer geht die Berührungssehne in einem Kreise durch den bezüglich dieses Kreises bestimmten Pol

der äußeren Ähnlichkeitsachse. Wenn nun zweitens die Kreise um O_1 und um O_2 durch die Kreise um X_3 und um X_3' eine gleichartige Berührung erleiden, aber die Kreise um O_1 und um O_3 eine ungleichartige, so daß auch die Kreise um O_2 und um O_3 eine ungleichartige Berührung erleiden müssen, so muß die Chordale der Kreise um X_3 und um X_3' durch A_{12}, J_{13}, J_{23} hindurchgehen, also mit der Ähnlichkeitsachse übereinstimmen, die den Kreis um O_3 bevorzugt. Also muß der Pol dieser Ähnlichkeitsachse bezüglich irgend eines der Kreise des Tripels auf der diesem Kreise angehörigen, von den Kreisen um X_3 und um X_3' hervorgerufenen Berührungssehne liegen. Genau so, wie soeben O_3 bevorzugt wurde, kann natürlich auch O_1 und O_2 bevorzugt werden. Dann hat man beziehungsweise die Pole von A_{23} J_{13} J_{21} und von A_{31} J_{21} J_{32} zu nehmen. Wir können demnach nunmehr den folgenden Satz aussprechen:

IV. Die äußere Ähnlichkeitsachse a und die drei inneren a_1, a_2, a_3 für drei beliebig gegebene Kreise um O_1, O_2, O_3 haben bezüglich jedes dieser Kreise vier Pole; durch jeden dieser vier Pole geht die auf diesen Kreis bezügliche Berührungssehne hindurch, die einem der vier Kreispaare um:

$$X, X'; \quad X_1, X_1'; \quad X_2, X_2'; \quad X_3, X_3'$$

angehört, von denen die beiden Kreise um X

und um X' keinen der drei Kreise bevorzugen und die beiden Kreise um X_i und um X'_i den Kreis um O_i bevorzugen, wo unter „bevorzugen“ zu verstehen ist, daß der bevorzugte Kreis von innen berührt wird, wenn die beiden andern Kreise von außen berührt werden, oder, daß der bevorzugte Kreis von außen berührt wird, wenn die beiden andern Kreise von innen berührt werden.

Durch Satz IV ist für jeden der Kreise um O_1, O_2, O_3 ein Punkt jeder Berührungssehne bestimmt. Ein zweiter Punkt jeder Berührungssehne wird auch durch Satz III geliefert. Denn nach diesem Satze muß die Chordale c_{12} der beiden Kreise um O_1 und um O_2 durch den äußeren oder inneren Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise gehen, deren Zentra oben X und X' bzw. X_1 und X'_1 bezw. X_2 und X'_2 bzw. X_3 und X'_3 genannt sind. Dasselbe gilt für die Chordale c_{13} der Kreise um O_1 und um O_3, sowie für die Chordale c_{23} der Kreise um O_2 und um O_3. Folglich muß der Chordalpunkt C des gegebenen Kreistripels entweder äußerer oder innerer Ähnlichkeitspunkt für jedes der vier Kreispaare sein, so daß er nach Satz I auf jeder der oben genannten 3 mal 4 Berührungssehnen liegen muß. Wir erhalten also den Satz:

V. Wenn drei Kreise um O_1, O_2, O_3 von einem Kreispaar berührt werden, gleichviel,

ob das Kreispaar keinen oder einen der drei Kreise bevorzugt, so muß jede der drei Berührungssehnen, die sich auf O_1, O_2, O_3 beziehen, durch den Chordalpunkt C der drei Kreise hindurchgehen.

Satz V liefert also einen zweiten Punkt der gesuchten 3 mal 4 Berührungssehnen, so daß nunmehr jede Berührungssehne bestimmt ist und dadurch auch die Zentra:

$$X, X'; \quad X_1, X_1'; \quad X_2, X_2'; \quad X_3, X_3'$$

der gesuchten Kreise, von denen jeder drei gegebene Kreise um O_1, O_2, O_3 berührt. Denn diese Zentra müssen auf den Verbindungslinien der durch die Berührungssehnen bestimmten Berührungspunkte mit den Zentren O_1, O_2, O_3 liegen.

Wenn die drei gegebenen Kreise um O_1, um O_2 und um O_3 so zueinander liegen, daß es kein Kreispaar gibt, welches die drei Kreise berührt und dabei entweder keinen Kreis oder den um O_i bevorzugt, so zeigt sich dies bei der oben gefundenen Steinerschen Konstruktion dadurch, daß die Verbindungsgeraden des Chordalpunktes C mit den Polen der Ähnlichkeitsachse a oder a_i bezüglich jedes der drei gegebenen Kreise die zugehörigen Kreise nicht schneiden. Die drei gegebenen Kreise können so liegen, daß es 4, 3, 2, 1, 0 Kreispaare gibt, die jeden von ihnen berühren. Beispielsweise gibt es

keinen Kreis, der die drei Kreise berührt, wenn der kleinste ganz innerhalb des nächst größeren liegt und dieser wieder ganz innerhalb des größten Kreises liegt. Wenn aber die drei Kreise so liegen, daß keiner den andern schneidet und daß auch keiner mit einem der beiden andern eine Fläche gemeinsam hat, so sind alle vier Kreispaare reell. Zwei von den acht Berührungskreisen, die ein Paar bilden, indem sie beide entweder keinen der drei gegebenen Kreise bevorzugen oder einen und denselben bevorzugen, sollen einander konjugiert heißen. Jeder der drei gegebenen Kreise kann von zwei konjugierten Kreisen gleichartig und ungleichartig berührt werden. Wenn z. B. die drei Kreise so liegen, daß keiner mit einem andern einen Teil der Fläche gemein hat, und daß der kleinste Kreis ganz innerhalb des Flächenstücks liegt, das von den Peripherien der beiden andern Kreise und ihren gemeinsamen äußeren Tangenten begrenzt wird, so gibt es zwei konjugierte Kreise, die keinen der drei gegebenen Kreise bevorzugen, indem sie beide jeden von außen berühren. Sobald jedoch der kleinste Kreis über das so begrenzte Gebiet hinausragt, besteht das Paar konjugierter Kreise aus einem Kreise, der alle drei gegebenen Kreise von außen berührt und einem, der sie alle drei von innen berührt. Wenn ferner ganz innerhalb des größten Kreises jeder der beiden andern gegebenen Kreise liegt, so gibt es zwei Kreise,

von denen jeder alle drei von innen berührt, ferner zwei, welche den größten Kreis bevorzugen, indem jeder von ihnen den größten Kreis von innen, die beiden andern von außen berührt, endlich noch

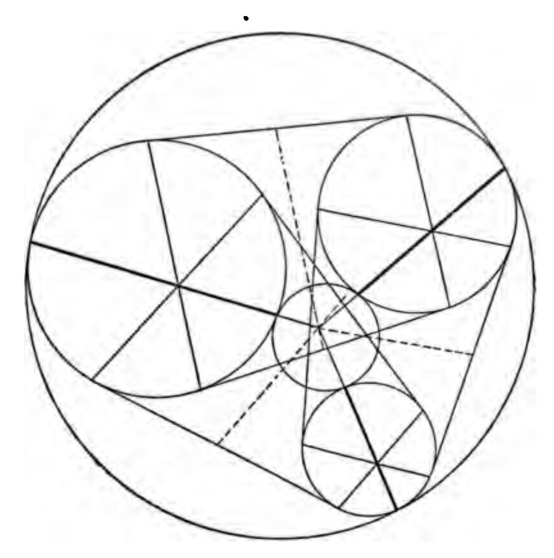


Fig. 17.

je zwei, welche jeden der kleineren Kreise bevorzugen.

Je nach der Lage der gegebenen Kreise kann man sich die Konstruktion des Chordalpunktes und der Pole der Ähnlichkeitsachsen auf diese oder jene Weise übersichtlich und bequem gestalten. Wenn

z. B. jeder der gegebenen Kreise ganz außerhalb der beiden andern liegt, und das Kreispaar gesucht wird, das keinen Kreis bevorzugt, ist es am übersichtlichsten, die dreimal zwei gemeinsamen äußeren Tangenten zu zeichnen und für jedes Tangentenpaar die Halbierungspunkte der Strecken zwischen den Berührungspunkten zu verbinden. Die drei Verbindungsgeraden schneiden sich in dem gesuchten Chordalpunkt. Die drei Pole der äußeren Ähnlichkeitsachse kann man finden, ohne diese Achse selbst zu zeichnen, indem man in jedem Kreise die beiden Verbindungsgeraden zusammengehöriger Berührungspunkte zieht. Ihr Schnittpunkt ergibt in jedem Kreise den gesuchten Pol der äußeren Ähnlichkeitsachse, und zwar deshalb, weil die Polaren zweier Punkte einer geraden Linie sich im Pol dieser geraden Linie schneiden. In Fig. 17 sind auf solche Weise der Chordalpunkt und die drei Pole der äußeren Ähnlichkeitsachse gezeichnet. Die Verbindungslinien des Chordalpunktes mit den drei Polen ergeben die drei Berührungssehnen und dadurch die beiden gesuchten Kreise.

§ 6. Die sechzehn Kugeln, welche vier gegebene Kugeln berühren.

Die Betrachtungen des § 5, welche zur Steinerschen Lösung des Problems des Apollonius führten, lassen sich leicht auf den Raum übertragen und

führen zur Lösung der Aufgabe, eine Kugel zu konstruieren, welche vier gegebene Kugeln berührt. So wie in § 5 die schon in § 1 behandelten Ähnlichkeitspunkte bei Kreisen und die schon in § 3 behandelten Chordalen bei Kreisen eine grundlegende Rolle spielten, so sind es hier die in § 2 behandelten Ähnlichkeitspunkte bei Kugeln und die in § 4 behandelten Chordalebenen bei Kugeln, von denen wir auszugehen haben. Bei vier Kugeln gibt es 12 Ähnlichkeitspunkte, 6 äußere und 6 innere. Wie in § 2 erörtert ist, liegen immer in einer Ebene sechs von den 12 Ähnlichkeitspunkten, und sind auf ihr die Schnittpunkte von vier Ähnlichkeitsachsen. Wie dort bezeichnen wir die sechs äußeren Ähnlichkeitspunkte der vier Kugeln um O_1, O_2, O_3, O_4 mit:

$$A_{12}, \; A_{13}, \; A_{14}, \; A_{23}, \; A_{24}, \; A_{34};$$

die vier inneren mit:

$$J_{12}, \; J_{13}, \; J_{14}, \; J_{23}, \; J_{24}, \; J_{34}.$$

Wie dort bezeichnen wir die vier äußeren Ähnlichkeitsachsen, d. h. diejenigen, die drei äußere Ähnlichkeitspunkte enthalten, mit:

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4;$$

und die zwölf inneren Ähnlichkeitsachsen, d. h. diejenigen, die einen äußeren und zwei innere Ähnlichkeitspunkte enthalten, mit:

$$i_{12}, \; i_{13}, \; i_{14}, \; i_{21}, \; i_{23}, \; i_{24},$$
$$i_{31}, \; i_{32}, \; i_{34}, \; i_{41}, \; i_{42}, \; i_{43},$$

gemäß der in § 2 auseinandergesetzten Bezeichnungsweise. Auch die acht Ähnlichkeitsebenen bezeichnen wir, wie dort, mit:

$$e, \; e_1, \; e_2, \; e_3, \; e_4, \; e_{12}, \; e_{13}, \; e_{14},$$

wo statt der angehängten Indices 12, 13, 14 ebensogut beziehungsweise 34, 24, 23 hätte gesetzt werden können. Der Bezeichnungsweise entsprechend, zerfallen die acht Ähnlichkeitsebenen in drei Gattungen, wie die folgende Tabelle zeigt:

Erste Tabelle.

Es liegen in einer Ebene:

Ebene	Punkte
e	a_1, a_2, a_3, a_4 und $A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24}, A_{34}$;
e_1	$a_1, i_{12}, i_{13}, i_{14}$ und $A_{23}, A_{24}, A_{34}, J_{12}, J_{13}, J_{14}$;
e_2	$a_2, i_{21}, i_{23}, i_{24}$ und $A_{13}, A_{14}, A_{34}, J_{21}, J_{23}, J_{24}$;
e_3	$a_3, i_{31}, i_{32}, i_{34}$ und $A_{12}, A_{14}, A_{24}, J_{31}, J_{32}, J_{34}$;
e_4	$a_4, i_{41}, i_{42}, i_{43}$ und $A_{12}, A_{13}, A_{23}, J_{41}, J_{42}, J_{43}$;
e_{12}	$i_{12}, i_{21}, i_{34}, i_{43}$ und $A_{12}, A_{34}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}$;
e_{13}	$i_{13}, i_{31}, i_{24}, i_{42}$ und $A_{13}, A_{24}, J_{12}, J_{14}, J_{32}, J_{34}$;
e_{14}	$i_{14}, i_{41}, i_{23}, i_{32}$ und $A_{14}, A_{23}, J_{12}, J_{13}, J_{42}, J_{43}$.

Diese Tabelle zeigt, daß sich je zwei der acht Ähnlichkeitsebenen entweder in einer Ähnlichkeitsachse oder in der Verbindungslinie eines Ähnlichkeitspunktes zweier Kugeln mit einem Ähnlichkeits-

punkte der beiden andern Kugeln schneiden. So schneiden sich:

$$e \text{ und } e_1 \text{ in } a_1, \quad e_1 \text{ und } e_{12} \text{ in } i_{12},$$

aber:

$$e \text{ und } e_{12} \text{ in } A_{12} A_{34}, \quad e_1 \text{ und } e_2 \text{ in } A_{34} J_{12},$$
$$e_{12} \text{ und } e_{13} \text{ in } J_{14} J_{23},$$

also entweder in der Verbindungslinie zweier äußerer oder zweier innerer Ähnlichkeitspunkte oder auch in der Verbindungslinie des äußeren Ähnlichkeitspunktes zweier Kugeln mit dem inneren Ähnlichkeitspunkte der beiden andern. Man beachte, daß die einem inneren Ähnlichkeitspunkte angehängten beiden Indices vertauscht werden dürfen, daß aber die beiden einer inneren Ähnlichkeitsachse angehängten Indices nicht vertauscht werden dürfen (§ 2).

Unter den 56 Punkten, die man erhält, wenn man auf alle mögliche Weise den Schnittpunkt je dreier der acht Ähnlichkeitsebenen bestimmt, sind 48 Punkte Ähnlichkeitspunkte und acht Punkte nicht. Jeder der zwölf Ähnlichkeitspunkte kommt viermal als Schnittpunkt dreier der acht Ebenen vor und zwar so, daß sich zwölf Gruppen von je vier Ebenen bilden lassen dergestalt, daß die vier zu einer solchen Gruppe gehörigen Ebenen sich in einem einzigen Punkte und zwar einem Ähnlichkeitspunkte schneiden. Dies zeigt die folgende Tabelle.

Zweite Tabelle.

Es schneiden sich in dem Punkte:

$A_{12}: e, \; e_3, \; e_4, \; e_{12}; \quad J_{12}: e_1, \; e_2, \; e_{13}, \; e_{14};$

$A_{13}: e, \; e_2, \; e_4, \; e_{13}; \quad J_{13}: e_1, \; e_3, \; e_{12}, \; e_{14};$

$A_{14}: e, \; e_2, \; e_3, \; e_{14}; \quad J_{14}: e_1, \; e_4, \; e_{12}, \; e_{13};$

$A_{23}: e, \; e_1, \; e_4, \; e_{14}; \quad J_{23}: e_2, \; e_3, \; e_{12}, \; e_{13};$

$A_{24}: e, \; e_1, \; e_3, \; e_{13}; \quad J_{24}: e_2, \; e_4, \; e_{12}, \; e_{14};$

$A_{34}: e, \; e_1, \; e_2, \; e_{12}; \quad J_{34}: e_3, \; e_4, \; e_{13}, \; e_{14}.$

Es bleiben also noch acht Gruppen von je drei sich nicht in einem Ähnlichkeitspunkte schneidenden Ebenen übrig. Die Schnittgerade je zweier Ebenen einer solchen Gruppe ist aber die Verbindungsgerade eines Ähnlichkeitspunktes zweier der vier Kugeln mit einem Ähnlichkeitspunkte der beiden andern. Achtmal drei derartige Verbindungsgeraden schneiden sich also in einem Punkte, so daß wir acht neue Punkte nämlich

$$P, \; P_1, \; P_2, \; P_3, \; P_4, \; P_{12}, \; P_{13}, \; P_{14}$$

erhalten, gemäß der folgenden Tabelle:

Dritte Tabelle.

Es schneiden sich in einem Punkte:

$P: e_{12}, \; e_{13}, \; e_{14}$ oder: $J_{12} J_{34}, \; J_{13} J_{24}, \; J_{14} J_{23};$

$P_1: e_2, \; e_3, \; e_4$ oder: $A_{12} J_{34}, \; A_{13} J_{24}, \; A_{14} J_{23};$

$P_2: e_3, \; e_4, \; e_1$ oder: $A_{23} J_{41}, \; A_{24} J_{31}, \; A_{21} J_{34};$

$P_3 : e_4 , \quad e_1 , \quad e_2$ oder: $A_{34} J_{12} , \; A_{31} J_{42} , \; A_{32} J_{41}$;

$P_4 : e_1 , \quad e_2 , \quad e_3$ oder: $A_{41} J_{23} , \; A_{42} J_{13} , \; A_{43} J_{12}$;

$P_{12} : e , \quad e_{13} , \quad e_{14}$ oder: $J_{12} J_{34} , \; A_{14} A_{23} , \; A_{13} A_{24}$;

$P_{13} : e , \quad e_{14} , \quad e_{12}$ oder: $J_{13} J_{24} , \; A_{12} A_{34} , \; A_{14} A_{23}$;

$P_{14} : e , \quad e_{12} , \quad e_{13}$ oder: $J_{14} J_{23} , \; A_{13} A_{24} , \; A_{12} A_{34}$.

Wenn nun zwei Kugeln sich von außen berühren, also ihr Berührungspunkt zwischen ihren Zentren liegt, so ist derselbe ihr innerer Ähnlichkeitspunkt. Wenn sie sich aber von innen berühren, also ihr Berührungspunkt auf der Verlängerung der Strecke zwischen den Zentren liegt, so ist derselbe der äußere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kugeln. In beiden Fällen ist die Ebene, errichtet im Berührungspunkt auf der Zentrale, die Chordalebene der beiden Kugeln.

Genau wie in § 5 für drei gegebene Kreise erhält man nun auch für vier gegebene Kugeln Sätze, aus denen die der Steinerschen Lösung des Problems des Apollonius analoge Lösung der Aufgabe folgt, eine Kugel zu konstruieren, welche vier Kugeln berührt. Wie wir dort, den vier Ähnlichkeitsachsen entsprechend, zu vier Paaren konjugierter Berührungskreise gelangten, so erhalten wir hier, den acht Ähnlichkeitsebenen entsprechend, acht Paare konjugierter Berührungskugeln, deren viermal acht Berührungssehnen zu bestimmen sind. Da wir jedoch in § 5 bei den Sätzen, die zur Steinerschen Lösung führen, den Hauptsatz der in Abschnitt IX, § 3 dargestellten

Polarentheorie brauchten, so müssen wir diesen Hauptsatz auf den Raum übertragen, was sehr einfach ist. Wenn nämlich bezüglich eines Kreises um M ein Punkt P und eine gerade Linie p Pol und Polare sind, und man rotiert die Figur um PM, so beschreibt der Kreis eine Kugel und die Polare p eine auf PM senkrechte Ebene, die Polarebene des Punktes P bezüglich der Kugel heißen soll. Man erkennt, daß jede durch den Pol P gehende Sekante die Polarebene in einem Punkte schneidet, der zu P harmonisch konjugiert ist, indem er die entstandene Sehne nach demselben Verhältnis teilt wie P. Demnach gilt im Raume als Hauptsatz der Polarentheorie:

Die Polarebenen aller Punkte einer Ebene e bezüglich einer Kugel schneiden sich in einem einzigen Punkte, dem Pol der Ebene e.

Genau so, wie in § 5 ergeben sich nun nacheinander die folgenden vier Sätze, die wir ebenso wie in § 5 numerieren, um die genaue Analogie deutlich hervortreten zu lassen.

I. Erleidet ein Kugelpaar durch eine Kugel eine gleichartige bzw. ungleichartige Berührung, so geht die Berührungssehne durch den äußeren bzw. inneren Ähnlichkeitspunkt des Kugelpaars.

II. Wenn ein Kugelpaar durch eine Kugel um X berührt wird, so geht die Berührungssehne durch den bezüglich der Kugel um X

bestimmten Pol der Chordalebene des Kugelpaares.

III. Erleidet ein Kugelpaar um O_1 und um O_2 durch eine Kugel um X eine gleichartige bzw. ungleichartige Berührung, und ebenso durch eine Kugel um Y eine gleichartige bzw. ungleichartige Berührung, so geht die Chordalebene der beiden Kugeln um X und um Y durch den äußeren bzw. inneren Ähnlichkeitspunkt des Kugelpaars.

Nach Satz III muß nun die Chordalebene zweier konjugierter Kugeln mit einer der oben besprochenen acht Ähnlichkeitsebenen übereinstimmen, und zwar mit:

$$e;\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4;\ e_{12},\ e_{13},\ e_{14},$$

je nachdem das Paar konjugierter Kugeln keine der vier Kugeln oder eine bevorzugt oder zwei Kugeln gleichartig berührt, die beiden anderen auch, jedoch so, daß die Berührung bei den beiden andern von innen stattfindet, wenn sie bei den erstgenannten von außen stattfand oder gerade umgekehrt. Wenden wir nun Satz II an, so erhalten wir, daß jede der zu bestimmenden Berührungssehnen in der Kugel um O_i durch den bezüglich derselben Kugel bestimmten Pol einer Ähnlichkeitsebene geht. Oder genauer:

IV. Die acht Ähnlichkeitsebenen

$$e;\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4;\ e_{12},\ e_{13},\ e_{14}$$

für vier beliebig gegebene Kugeln um O_1, O_2, O_3, O_4 haben bezüglich jeder dieser Kugeln acht Pole; durch jeden dieser acht Pole geht die auf diese Kugel bezügliche Berührungssehne hindurch, die einem der acht Kugelpaare um:

$$X, X'; \quad X_1, X_1'; \quad X_2, X_2'; \quad X_3, X_3'; \quad X_4, X_4';$$
$$X_{12}, X_{12}'; \quad X_{13}, X_{13}'; \quad X_{14}, X_{14}'$$

angehört, von denen erstens die beiden Kugeln um X und um X' keine der vier gegebenen Kugeln bevorzugen, von denen zweitens die beiden Kugeln um X_i und um X_i' die Kugel um O_i insofern bevorzugen, als von ihnen O_i von innen berührt wird, wenn die drei andern von außen berührt werden, oder gerade umgekehrt, von denen drittens die beiden Kugeln um X_{ik} und um X_{ik}' die beiden Kugeln um O_i und um O_k von außen berühren, wenn sie die beiden anderen Kugeln von innen berühren oder gerade umgekehrt.

Außer durch einen der acht Pole muß aber jede Berührungssehne auch durch den Chordalpunkt der vier Kugeln gehen, weil nach Satz III der äußere oder innere Ähnlichkeitspunkt zweier konjugierter Kugeln auf jeder der sechs Chordalebenen liegen, also mit dem Chordalpunkt der vier Kugeln zusammenfallen muß.

Hiernach ist also jede der acht Berührungssehnen in jeder der gegebenen Kugeln um O_i bestimmt, und zwar als Verbindungsgerade des Chordalpunktes der vier Kugeln um O_1, O_2, O_3, O_4 mit dem in bezug auf O_i bestimmten Pol einer der acht Ähnlichkeitsebenen.

Die obigen Betrachtungen führen auch zu interessanten Lagebeziehungen zwischen den 16 Berührungskugeln, auf die der Verfasser schon als Studiosus in Berlin im Jahre 1869[1]) aufmerksam gemacht hat. Zunächst gehen aus den Beziehungen der acht Ähnlichkeitsebenen mit den Chordalebenen und der zwölf Ähnlichkeitspunkte mit den Chordalpunkten vier Sätze hervor:

Erster Satz: Die Ähnlichkeitsebene e_λ ist die Chordalebene der konjugierten Kugeln um X_λ und um X'_λ.

Zweiter Satz: Der Chordalpunkt C ist der äußere oder der innere Ähnlichkeitspunkt für jedes Paar konjugierter Kugeln.

Dritter Satz: Der Schnittpunkt dreier Ähnlichkeitsebenen ist der gemeinsame Chordalpunkt der drei Paare konjugierter Berührungskugeln, welche dieselben drei Indices haben, wie jene drei Ebenen.

Vierter Satz: Wenn vier Ähnlichkeitsebenen einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, so ist dieser

---

[1]) In Schloemilchs Zeitschrift, Bd. XIV.

der gemeinsame Chordalpunkt der vier Paare konjugierter Berührungskugeln, welche dieselben Indices haben, wie jene vier Ebenen.

Nach dem dritten und vierten Satze erhalten wir aus den oben als zweite und dritte Tabelle bezeichneten Tabellen neue Wahrheiten, wenn wir an Stelle jedes e_λ das entsprechende X_λ, X'_λ setzen und gleichzeitig statt „schneiden sich in einem Punkte", „haben zum gemeinsamen Chordalpunkt" sagen. So erhalten wir zwölf Gruppen von je vier Paaren konjugierter Kugeln und acht Gruppen von je drei Paaren konjugierter Kugeln von der Beschaffenheit, daß die zu einer Gruppe gehörigen Kugeln einen gemeinsamen Chordalpunkt haben.

Haben nun n Kugeln außer einem gemeinsamen Chordalpunkt eine gemeinsame Berührungskugel, so kann man ja immer durch Verbindung des letztern mit den Berührungspunkten die Berührungspunkte einer neuen Kugel erhalten, die der ersten konjugiert ist. Die oben betrachteten Kugelgruppen mit gemeinsamem Chordalpunkt, werden nun aber von jeder der vier Kugeln um O_1, um O_2, um O_3 und um O_4 zugleich berührt. Es muß daher zu jeder dieser vier Kugeln eine in bezug auf jede Gruppe konjugierte Berührungskugel geben. Berücksichtigen wir nun noch, daß für eine Gruppe von Kugeln, deren gemeinsamer Chordalpunkt ein Ähnlichkeitspunkt der Kugeln um O_k und um O_l ist, diese bei-

den Kugeln selbst als einander konjugiert erscheinen werden, so schließen wir, daß es für jede der zwölf Gruppen von vier Paaren konjugierter Kugeln zwei neue Berührungskugeln gibt, welche denjenigen beiden unter den vier gegebenen Kugeln um O_1, um O_2, um O_3 und um O_4 konjugiert sind, welche andere Indices haben als der Ähnlichkeitspunkt, der als gemeinsamer Chordalpunkt der Gruppe auftritt. Es gibt daher 24 solcher Kugeln. Dagegen muß es für jede der acht Gruppen von je drei Paaren konjugierter Kugeln, deren gemeinsamer Chordalpunkt kein Ähnlichkeitspunkt, sondern ein P_λ ist (vgl. die obige dritte Tabelle), noch zu jeder der vier Kugeln um O_1, O_2, O_3, O_4 eine konjugierte Berührungskugel geben. Von solchen Kugeln gibt es daher 32. Unser Resultat läßt sich so aussprechen:

Die 16 Kugeln, welche vier Kugeln berühren, haben eine solche Lage, erstens daß man 12 Gruppen von je acht Kugeln aus ihnen bilden kann, so daß es, abgesehen von den vier ursprünglichen Kugeln, immer zwei Kugeln gibt, von denen jede die sämtlichen acht Kugeln einer solchen Gruppe berührt und zweitens, daß man acht in jenen Gruppen nicht schon enthaltene Gruppen von je sechs Kugeln bilden kann, so daß es, abgesehen von den vier ursprünglichen Kugeln, immer vier Kugeln gibt, von denen jede

alle sechs Kugeln einer solchen Gruppe berührt.

Etwas mehr gekürzt lautet dieser Satz, den der Verfasser 1869 fand und veröffentlichte (vgl. das obige Zitat):

Die 16 Kugeln, welche vier Kugeln berühren, liegen so, daß sich 24 neue Kugeln finden lassen, von denen jede acht von jenen 16 Kugeln berührt, und 32 von den 24 verschiedene Kugeln, von denen jede sechs von jenen 16 Kugeln berührt.

Man konstruiert diese 56 Kugeln, indem man durch Verbindung des Chordalpunktes der zu berührenden sechs oder acht Kugeln mit den zugehörigen Berührungspunkten auf den vier ursprünglichen Kugeln die Berührungssehnen bestimmt. Da jede der 56 Kugeln irgend einer der vier ursprünglichen Kugeln, also einer reellen Kugel konjugiert ist, so erkennt man, daß jene 56 Kugeln stets reell sind, auch dann, wenn mehrere Kugeln oder alle, die sie berühren sollen, imaginär sind.

Das einfachere ebene Analogon unseres Resultats, das schon länger bekannt war, lautet, daß jede der sechs Gruppen von je zwei Paaren konjugierter Berührungskreise (§ 5), in welche die acht Kreise zerfallen, die drei Kreise berühren, einen neuen gemeinsamen Berührungskreis hat.

In unserem Verlage erschien ferner:

Mathematische Mußestunden.

Eine Sammlung
von
Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur
von
Dr. Hermann Schubert,
Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums zu Hamburg.

Große Ausgabe in 3 Bdn. gebunden à M. 4.—.
Kleine Ausgabe gebunden M. 5.—.

Wie schon der Titel sagt, handelt es sich hier um kein streng wissenschaftliches Werk, sondern um ein Buch, in dem der Verfasser allerhand Gedanken über Dinge niedergelegt hat, die mit der Mathematik in Berührung stehen und mit denen sich jeder Gebildete oft und gern in seinen Mußestunden beschäftigt. Es sind ungezwungene kritisch-historische Betrachtungen und unterhaltende Plaudereien über alle möglichen Probleme und Kunststücke, die in einer auch dem Laien leicht faßlichen Form vorgeführt, erzählt und ergänzt werden.

Zwölf Geduldspiele für Nicht-Mathematiker

zum Zwecke der Unterhaltung historisch und kritisch beleuchtet
von
Dr. Hermann Schubert,
Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg.

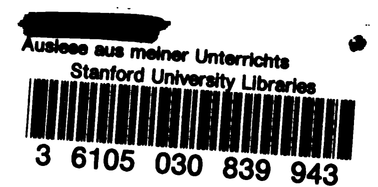
Originell kartoniert M. 2.—.

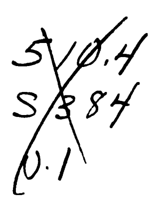
Neue Ausgabe.

In einigen dieser Spiele dürfte jeder Leser alte Bekannte wiedererkennen, die ihm arges Kopfzerbrechen gemacht haben. Kinderleicht wird indessen die Arbeit, wenn man den Weisungen des Verfassers folgt. Derselbe begnügt sich übrigens nicht mit der Schilderung der Spiele und der Enthüllung ihrer Geheimnisse, sondern erteilt zugleich sehr anziehende kulturgeschichtliche Aufschlüsse.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

510.4
S384


Auslese aus meiner Unterrichts
Stanford University Libraries
3 6105 030 839 943



v.1

